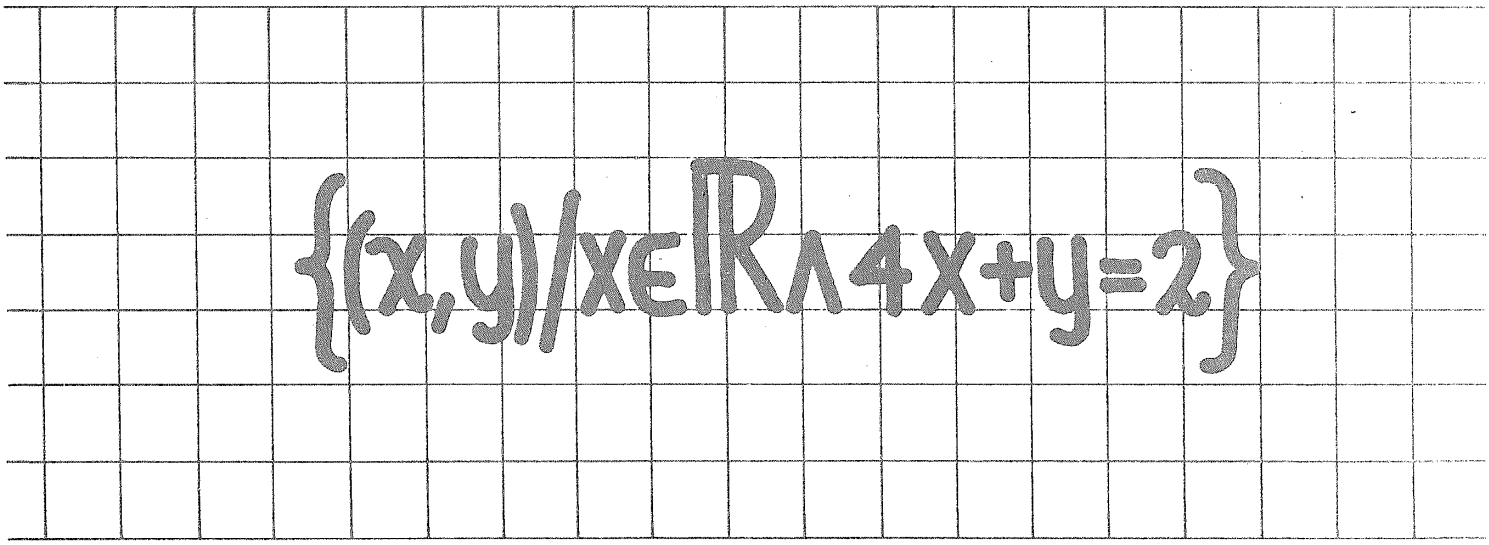
FUNCIONES

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. La ecuación como modelo matemático
2. Ecuaciones de primer grado
3. Sistemas de ecuaciones de primer grado
4. Desigualdades de primer grado
5. Ecuaciones de segundo grado
6. Desigualdades de segundo grado
7. La relación como modelo matemático
8. ***Funciones***
9. Funciones exponenciales
10. Funciones logarítmicas
11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas
12. Resolución de problemas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 8

FUNCIONES

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
FUNCIONES
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1522-5

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

8.1 Identificación de funciones (1) 9

8.2 Identificación de funciones (2) 22

8.3 Notación de funciones 36

8.4 Algunas clases de funciones 55

8.5 Clasificación de las funciones (suprayección, inyección y biyección) 88

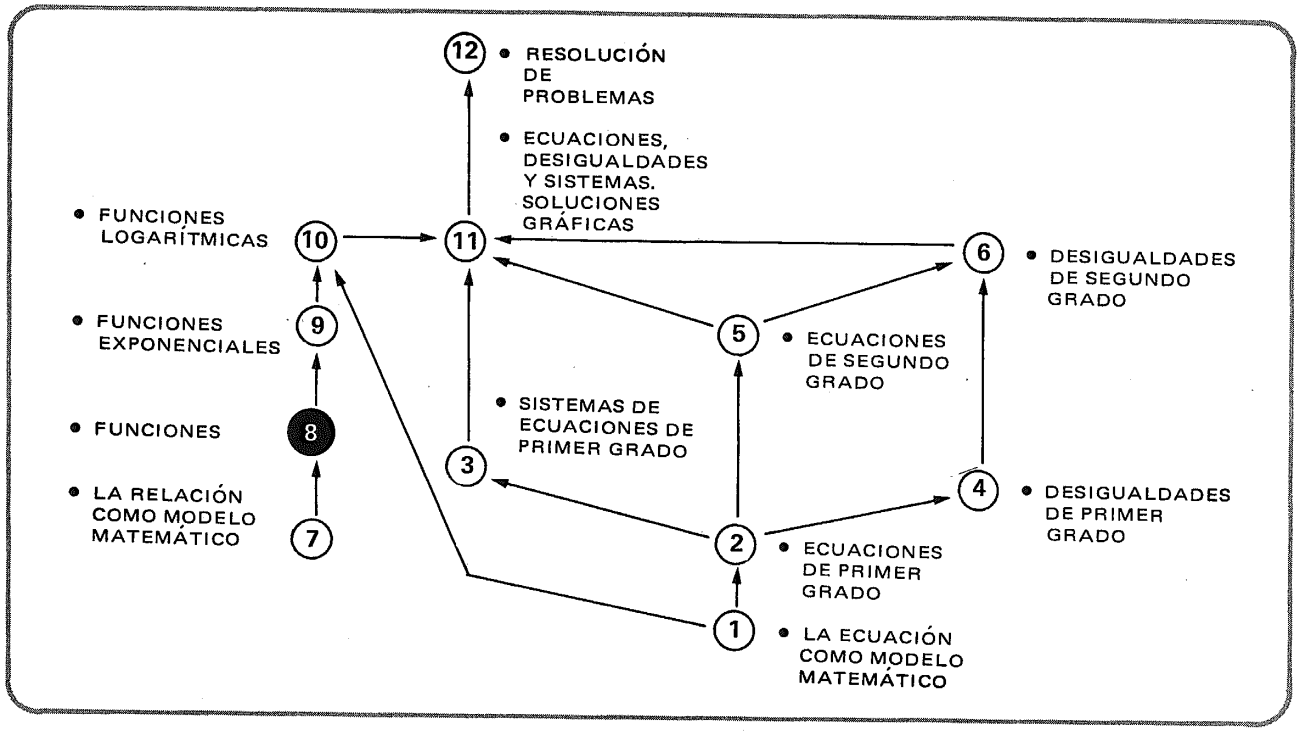
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

- ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
- sistemas de ecuaciones o desigualdades
- relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 8. Funciones

Objetivos: interpretar una función como el modelo matemático de una situación real, representarla simbólica y gráficamente, y señalar sus elementos

Prerrequisitos:

	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Relación (concepto, elementos y representación gráfica)	2	7

8.1

Identificación de funciones (1)

1

Hay un tipo de

relaciones

cuyo estudio
tiene
particular
importancia.

2

Son aquellas
en que

a cada elemento del dominio

le corresponde

un elemento del codominio,
y sólo uno.

les llamaremos **funciones.**

3

Cuando la relación
está definida por

extensión o enumeración de sus elementos

podemos

identificarla como **función**

si no hay dos pares ordenados

con el mismo primer componente.

4

Señalar la opción correcta.

La relación

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 4), (3, 6)\}$$

es/no es una función,

porque

- **no es**
- **sí** hay dos pares ordenados con el mismo primer componente; por ejemplo: los pares **(2, 4)** y **(2, 6)** tienen el mismo primer componente **(2)**

5

La relación

$$R_2 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

es/no es una función

porque

- **no es**
- **sí** hay dos pares ordenados con el mismo primer componente; los pares **(c, 1)** y **(c, 2)** tienen el mismo primer componente **(c)**

6

La relación

R_3 $\{(\diamond, \square), (\spadesuit, \bigcirc), (\spadesuit, \square), (\heartsuit, \square),$

es/no es una función, $(\clubsuit, \bigcirc), (\clubsuit, \square),\}$

porque

_____

- **no es**
- **sí** hay dos pares ordenados con el mismo primer componente; por ejemplo: los pares $(\spadesuit, \bigcirc)$ y $(\spadesuit, \square)$ tienen el mismo primer componente $(\spadesuit)$

7

La relación

$R_4 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4,8), (5, 10)\}$

es/no es una función,

porque

_____

- **es**
- **no** hay dos pares ordenados con el mismo primer componente

8

La relación

$R_5 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$

es/no es una función,

porque

_____

- **es**
- **no** hay dos pares ordenados con el mismo primer componente

9

La relación

$$R_6 = \{(0,1), (0,2)\}$$

es/no es una función,

porque

└──────────────────────────┘

- **no es**
- **sí** hay dos pares ordenados con el mismo primer componente: **(0, 1)** y **(0, 2)** tienen el mismo primer componente **(0)**

2.8.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

10

Cuando la relación
está representada por medio
de una

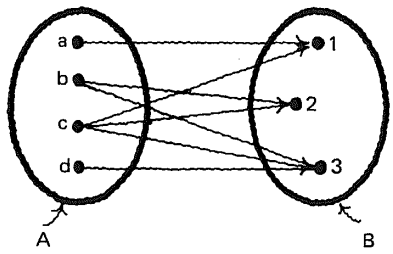
gráfica sagital podemos
identificarla como **función**

si no hay un elemento del dominio
que sea origen de dos o más flechas.

11

Señalar la opción correcta.

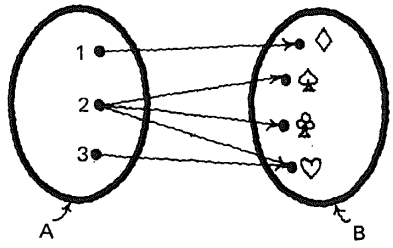
La gráfica sagital mostrada representa/no representa una función, porque



- **no representa**
- **sí** hay un elemento del dominio que es origen de dos o más flechas; por ejemplo: b es origen de dos flechas c es origen de tres flechas

12

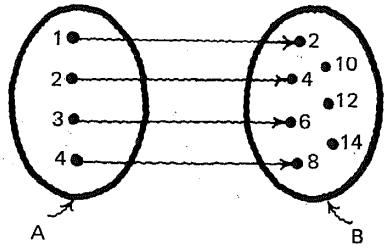
La gráfica sagital mostrada representa/no representa una función, porque



- **no representa**
- **sí** hay un elemento del dominio que es origen de dos o más flechas; el elemento **2** es origen de más de 2 flechas

13

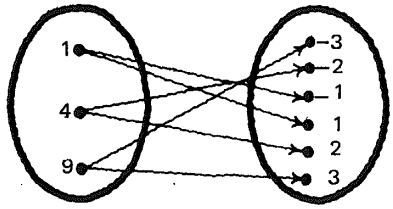
La gráfica sagital mostrada representa/no representa una función, porque



- **representa**
- **no** hay un elemento del dominio que sea origen de dos o más flechas

14

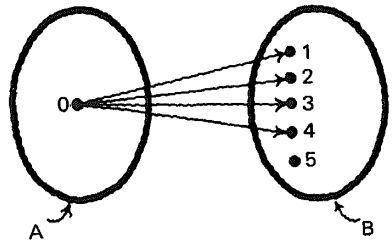
La gráfica sagital mostrada representa/no representa una función, porque



- **no representa**
- **sí** hay un elemento del dominio que es origen de dos o más flechas, por ejemplo: el elemento **1** es origen de dos flechas

15

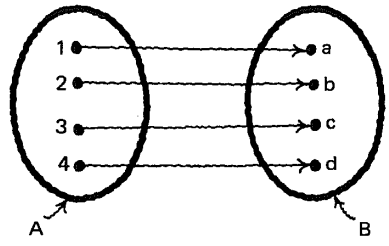
La gráfica sagital mostrada representa/no representa una función, porque



- **no representa**
- **sí** hay un elemento del dominio que es origen de dos o más flechas

16

La gráfica sagital mostrada representa/no representa una función, porque

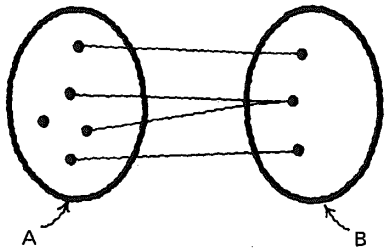


- **representa**
- **no** hay un elemento del dominio que sea origen de dos o más flechas

17

Atención.

No aceptaremos como representativa de una función a una gráfica sagital como ésta en que, al menos un elemento de A no es original de cuando menos una flecha.



2.8.1.2

Práctica adicional, si se considera necesario, de identificación de funciones a partir de gráficas sagitales dadas.

18

Cuando la relación está representada por medio de una

gráfica cartesiana

podemos identificarla como

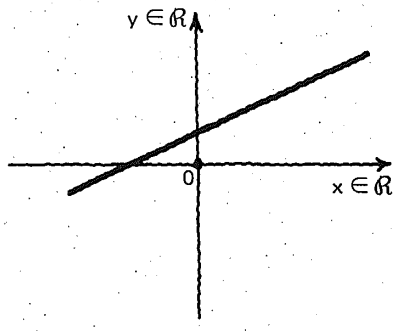
función

si toda recta paralela al eje de las ordenadas, en cualquier punto del dominio, interseca a la gráfica en un punto y sólo uno.

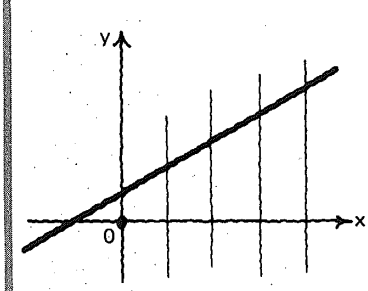
19

Señalar la opción correcta.

La gráfica cartesiana
mostrada
representa/no representa
una función,
porque



- **representa**



- toda recta paralela al eje de las ordenadas (digamos: toda vertical) interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

20

Atención.

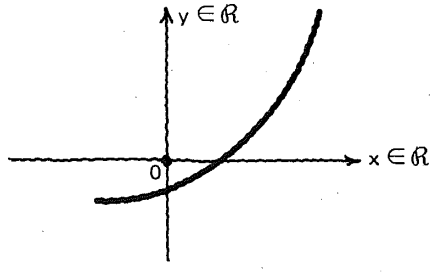
Cualquier recta vertical que tracemos "corta" a la gráfica en un punto, y sólo uno, dentro del dominio de la función

Podemos llamar a este procedimiento para identificar una función:

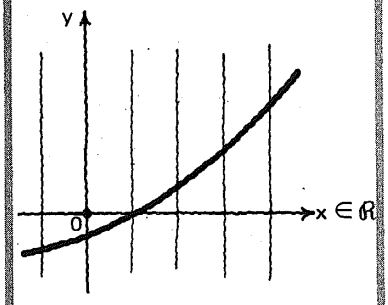
prueba de la vertical

21

La gráfica cartesiana
mostrada
representa/no representa
una función,
porque



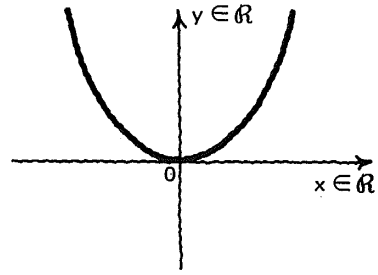
- **representa**



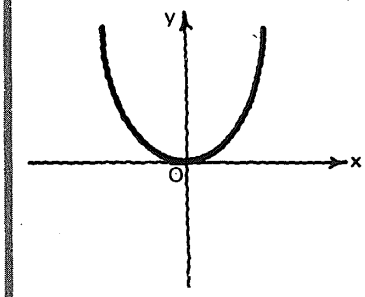
- toda vertical trazada para $x \in \Re$ interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

22

La gráfica cartesiana mostrada representa/no representa una función, porque



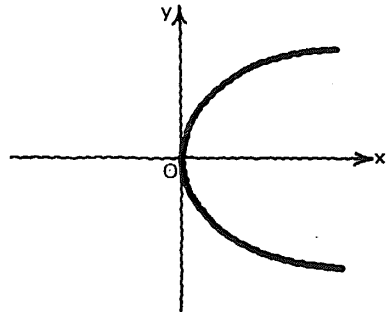
- **representa**



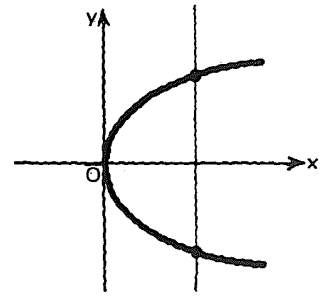
- toda vertical trazada dentro del dominio interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

23

La gráfica cartesiana mostrada representa/no representa una función, porque



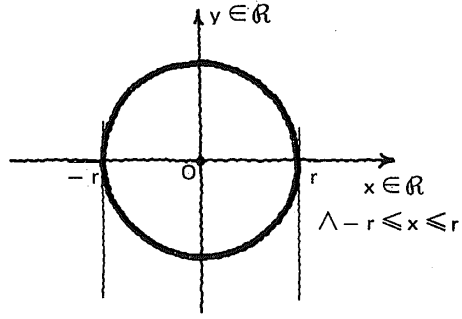
- **no** representa



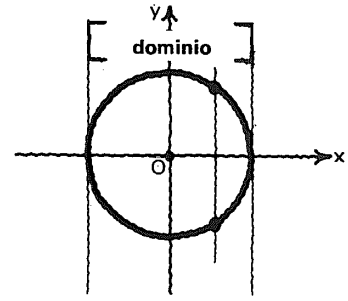
- hay al menos una vertical, dentro del dominio, que interseca a la gráfica en más de un punto

24

La gráfica cartesiana mostrada representa/no representa una función, porque



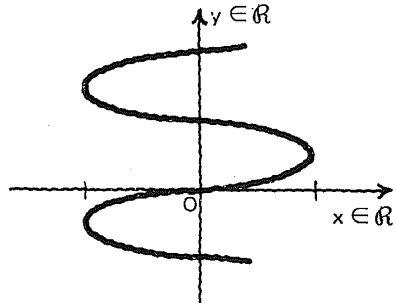
- **no** representa



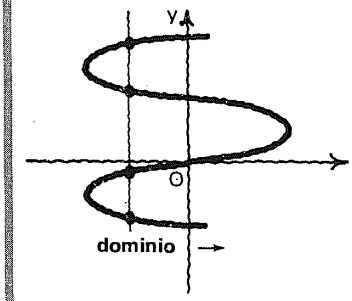
- hay al menos una vertical, dentro del dominio que interseca a la gráfica en más de un punto

25

La gráfica cartesiana representa/no representa una función, porque



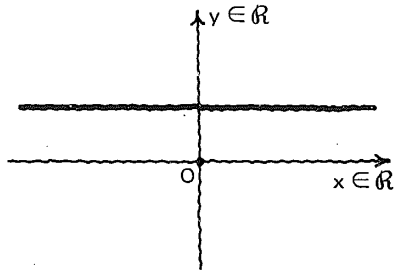
- **no** representa



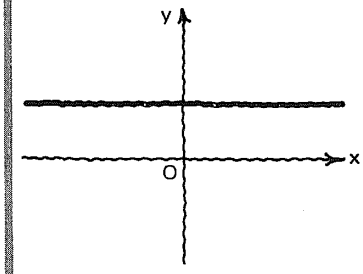
- hay al menos una vertical, dentro del dominio, que interseca a la gráfica en más de un punto

26

La gráfica cartesiana mostrada representa/no representa una función, porque



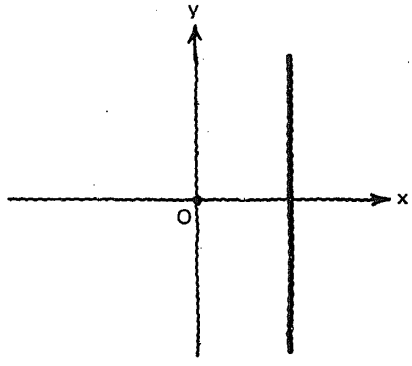
- **representa**



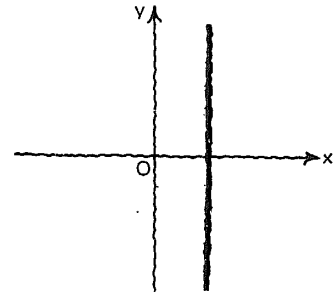
- toda vertical, trazada dentro del dominio, interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

27

La gráfica cartesiana mostrada representa/no representa una función, porque



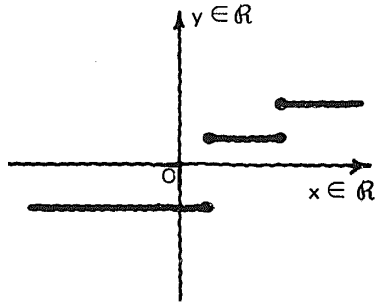
- **no** representa



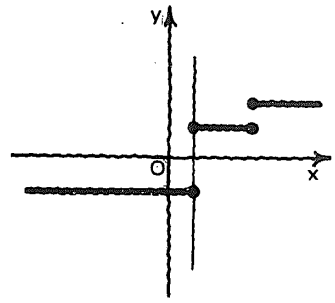
- hay al menos una vertical, dentro del dominio, que interseca a la gráfica en más de un punto

28

La gráfica cartesiana mostrada representa/no representa una función, porque



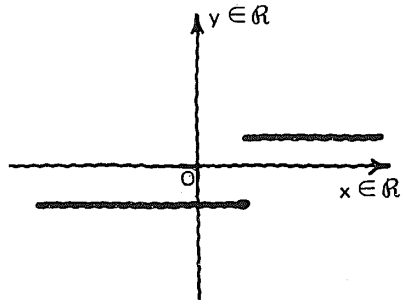
- **no** representa



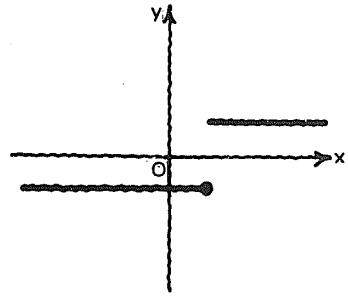
- hay al menos una vertical, dentro del dominio, que interseca a la gráfica en más de un punto

29

La gráfica cartesiana mostrada representa/no representa una función, porque



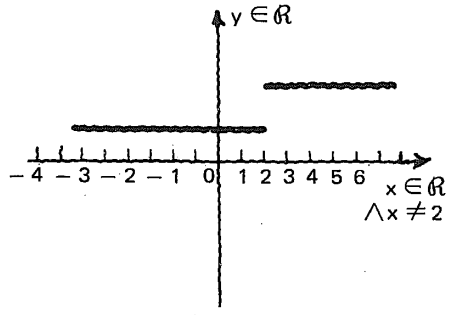
- **representa**



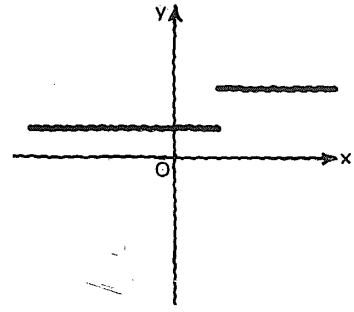
- toda vertical trazada, dentro del dominio, interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

30

La gráfica cartesiana mostrada representa/no representa una función, porque



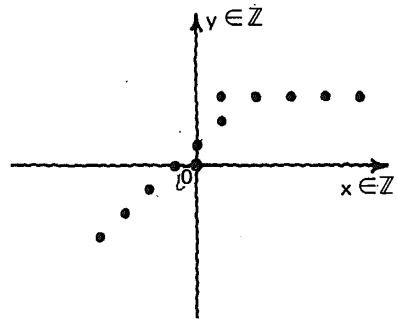
- **representa**



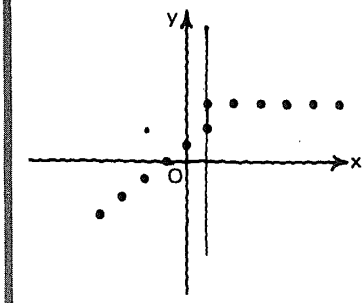
- toda vertical trazada dentro del dominio, interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

31

La gráfica cartesiana mostrada representa/no representa una función, porque



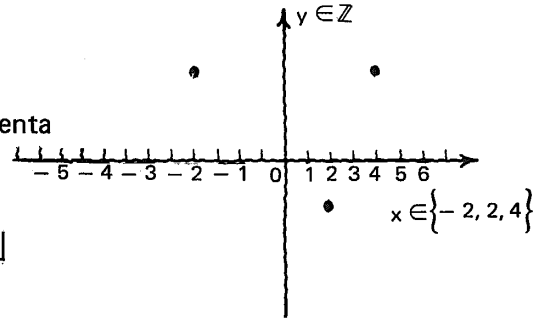
- **no representa**



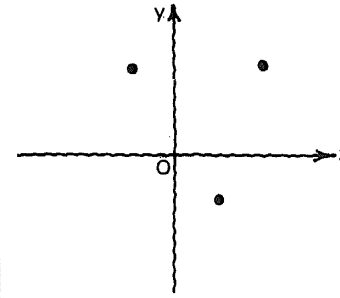
- existe al menos una vertical dentro del dominio que interseca a la gráfica en más de un punto

32

La gráfica cartesiana mostrada representa/no representa una función, porque



- **representa**



- toda vertical trazada dentro del dominio, interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

2.8.1.3

Práctica adicional, si se considera necesario, de identificación de funciones a partir de gráficas cartesianas dadas.

33

Cuando la relación
está definida por medio de la

regla de correspondencia,

no siempre resulta fácil
identificarla como

función,

por simple inspección.
Conviene, entonces, expresarla
en alguna de las formas estudiadas.

2.8.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* las funciones de un conjunto dado de relaciones definidas por enumeración de sus elementos;
- *identificar* las funciones de un conjunto dado de relaciones representadas por medio de su gráfica sagital;
- *identificar* las funciones de un conjunto dado de relaciones representadas por medio de su gráfica cartesiana.

8.2

Identificación de funciones (2)

34

Se requiere saber si
la relación

$$\{(x,y)/x \in \mathbb{R} \wedge 4x + y = 2\}$$

es o no es una **función.**

Para ello, vamos a

trazar su
gráfica cartesiana.

35

Tomemos la expresión de la regla
de correspondencia

$$4x + y = 2$$

y despejemos y:

$$y = \underline{\qquad\qquad}$$

$2 - 4x$

36

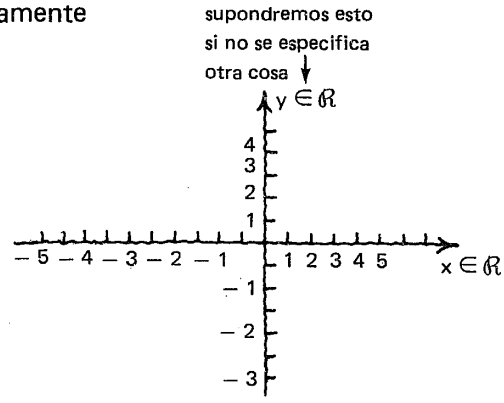
Tomemos ahora algunos elementos $x \in \mathbb{R}$ arbitrariamente seleccionados y calculemos los segundos componentes (y) de los pares ordenados (x,y):

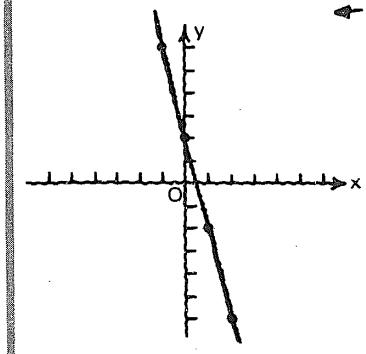
x	y = 2 − 4x
−2	
−1	
0	
1	
2	

x	y = 2 − 4x
− 2	10
− 1	6
0	2
1	− 2
2	− 6

37

Representemos gráficamente los pares ordenados de la tabla y completemos la gráfica cartesiana





38

Señalar la opción correcta.

Representada gráficamente podemos afirmar que la relación

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge 4x + y = 2\}$

es/no es una función,

porque

- es
- en la gráfica cartesiana, toda vertical trazada dentro del dominio, interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

39

Recordemos que

dominio

es el **conjunto** formado por

los primeros componentes (x)

de todos los pares ordenados que pertenece n a una

relación dada.

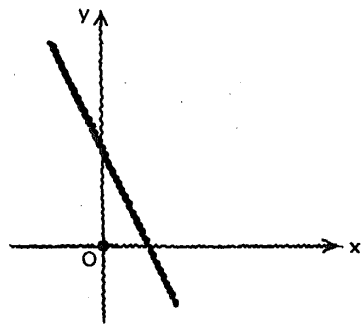
40

Entonces,

el **dominio de la función**

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge 4x + y = 2\}$

cuya gráfica cartesiana tiene este aspecto →



es ⌊_____⌋

$\mathbb{R}$

41

Recordemos también que

rango

es el

conjunto

formado por los

segundos componentes (y)

de todos los pares ordenados que pertenecen a una

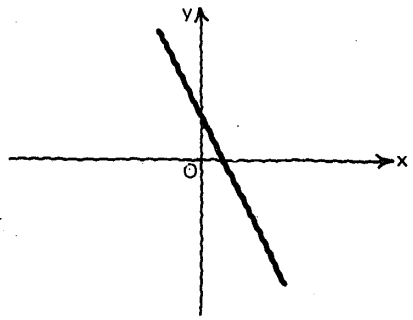
relación dada

42

Entonces,
el **rango** de la función

$\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge 4x + y = 2\}$

cuya gráfica cartesiana
tiene este aspecto ⟶



es [ ]

$\mathcal{R}$

43

Imagen

es el

segundo componente (y)

de cada uno de los pares
ordenados (x, y) que
pertenecen a una

relación

dada.

44

En la función

$$\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge 4x + y = 2\}$$
$$\downarrow$$
$$y = 2 - 4x$$

la imagen de 3 es [ ]

• — 10

si $x = 3$
$y = 2 - 4(3)$
$y = 2 - 12$
$y = -10$

45

En la función

$$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge 4x + y = 2\}$$
$$\downarrow$$
$$y = 2 - 4x$$

la imagen de 0 es [_____]

• 2

si $x = 0$

$y = 2 - 0$

$y = 2$

46

En la función

$$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge 4x + y = 2\}$$
$$\downarrow$$
$$y = 2 - 4x$$

la imagen de x_1 es [_____]

$y_1 = 2 - 4x_1$

47

Codominio

de una relación dada
es
cualquier conjunto
que
contenga como subconjunto propio
o impropio
al
conjunto de todas las imágenes.

48

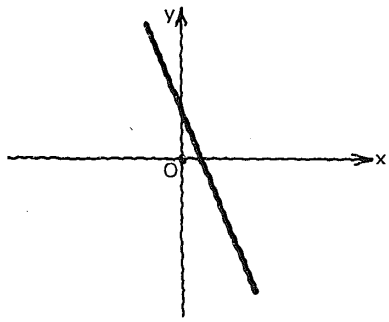
Atención.

Entonces,
el **codominio** de la función

$\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge 4x + y = 2\}$

cuya gráfica cartesiana tiene
este aspecto

sería [ ]



Por ejemplo:

$\mathcal{R}$

49

Se requiere saber
si la relación

$$\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge -2 \leqslant x \leqslant 2 \wedge x^2 + y^2 = 4\}$$

es o no es una función.

Para ello,
empezaremos por

trazar su **gráfica cartesiana.**

50

Tomemos la expresión de la
regla de correspondencia

$$\boxed{x^2 + y^2 = 4}$$

y despejemos y:

$y =$ [ ]

$x^2 + y^2 = 4$

$y^2 = 4 - x^2$

$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

51

Tomemos algunos elementos

$x \in \mathbb{R},\ -2 \leqslant x \leqslant 2$

y calculemos
sus correspondientes

imágenes:

x	$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$
-2	0
-1	$\sqrt{3}\ ,\ -\sqrt{3}$
0	$2\ ,\ -2$
1	$\sqrt{3}\ ,\ -\sqrt{3}$
2	0

52

No olvidemos que:

función

es una relación en la que

a cada elemento del dominio

le corresponde

una imagen y sólo una.

53

Atención.

Entonces, la relación

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leqslant x \leqslant 2 \wedge x^2 + y^2 = 4\}$

es/no es una función

porque

Atención.

- **no es**
- hay al menos un elemento del dominio al cual le corresponden dos o más imágenes;

  por ejemplo:
  al elemento 0 le corresponden dos imágenes: 2 y -2

54

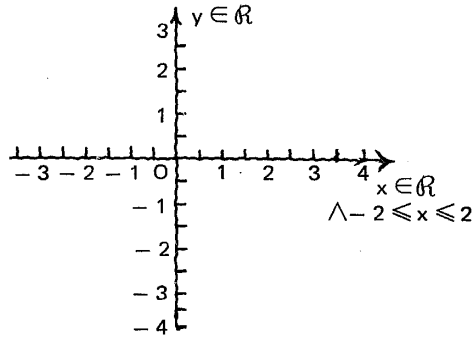
En esta relación
observamos que :
hay al menos dos pares ordenados
que tienen el mismo
primer componente:

(0, 2)
y
(0, − 2)

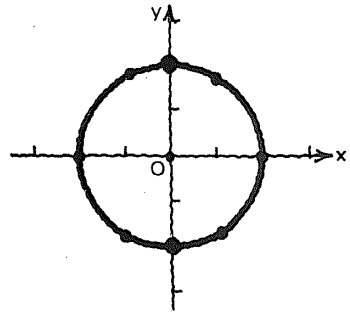
55

Ahora, representemos gráficamente los
pares ordenados de la tabla y
completemos la gráfica cartesiana:

x	$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$
− 2	0
− 1	$\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$
0	2 , − 2
1	$\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$
2	0



$\sqrt{3}$ = 1.732



56

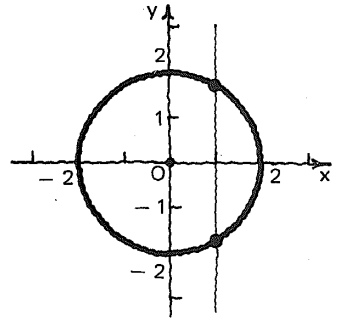
La gráfica cartesiana
de la relación

$$\{(x, y)/x \in \Re \wedge -2 \leqslant x \leqslant 2 \wedge x^2 + y^2 = 4\}$$

nos permite afirmar, también, que
la relación dada

no es una función,

porque



hay al menos una vertical
dentro del dominio, que
interseca a la gráfica en
más de un punto

57

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leqslant x \leqslant 2 \wedge x^2 + y^2 = 4\}$

Su **dominio** es ⟶ $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

Su **rango** es ⟶ $\{y/y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leqslant y \leqslant 2\}$

Su **codominio** podría ser ⟶ $\mathbb{R}$

58

Se requiere saber
si la relación

$$\{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y < x\}$$

es o no es una función.

59

Tomemos algunos elementos x
tales que: $x \in \mathbb{Z}$
y calculemos sus imágenes:

x	$y < x$
− 2	
− 1	
0	
1	
2	
3	

x	$y < x$
− 2	− 3, − 4, − 5, − 6, . . .
− 1	− 2, − 3, − 4, − 5, . . .
0	− 1, − 2, − 3, − 4, . . .
1	0, − 1, − 2, − 3, . . .
2	1, 0, − 1, − 2, . . .
3	2, 1, 0, − 1, . . .

60

Señalar la opción correcta.

Con la ayuda de la tabla anterior podemos afirmar que la relación

$\{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y < x\}$

es/no es una función,

porque

_____

- **no es**
- hay al menos un elemento del dominio al cual le corresponden dos o más imágenes; por ejemplo: al elemento 0 le corresponde

un número infinito

de imágenes

61

Hemos visto que:

la **imagen**

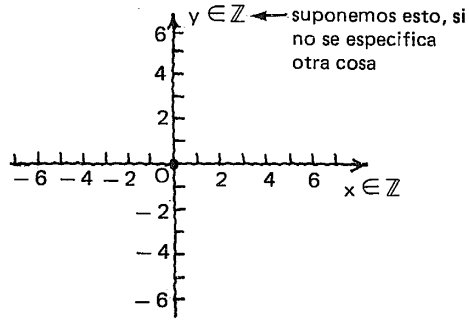
del elemento 0
es
el conjunto

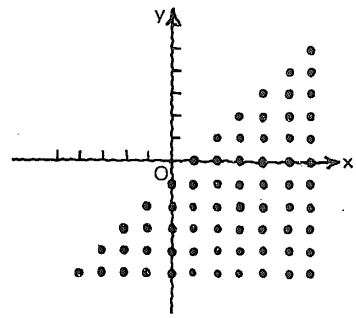
$\{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$

62

Representemos gráficamente los pares ordenados que se desprenden de la tabla y completemos la gráfica cartesiana:

x	y < x
−2	−3, −4, −5, −6,...
−1	−2, −3, −4, −5,...
0	−1, −2, −3, −4,...
1	0, −1, −2, −3,...
2	1, 0, −1, −2,...
3	2, 1, 0, −1,...





63

La gráfica cartesiana
nos revela
que
la relación

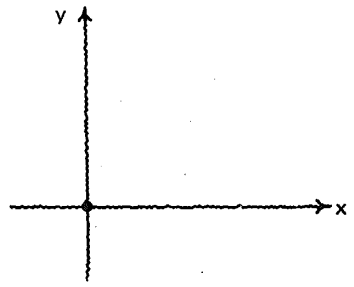
$$\{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y < x\}$$

es/no es una función,

porque

└_____┘

- **no es**



- existe al menos una vertical dentro del dominio, que interseca a la gráfica en más de un punto

64

El

dominio

de la relación

$$\{(x, y/x \in \mathbb{Z} \wedge y < x\}$$

es ——→ └___┘

y su **rango** es → └___┘

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$

65

Se requiere saber si la relación

R: $\{$(15) Alberto, (15) Enrique, (16) Leonardo$\}$ → $\{$(15) Rocío, (14) Patricia$\}$ / la edad del muchacho = la edad de la muchacha

es o no es una función,*

* Los numerales indicados representan las edades.

66

Enumeremos
los pares ordenados
de la relación

$$R: \{\overset{(15)}{\text{Alberto}},\ \overset{(15)}{\text{Enrique}},\ \overset{(16)}{\text{Leonardo}}\} \rightarrow \{\overset{(15)}{\text{Rocío}},\ \overset{(14)}{\text{Patricia}}\}$$

/la edad del muchacho = edad de la muchacha

$R = \{$ _____ $\}$

(Alberto, Rocio),
(Enrique, Rocío)

67

Señalar la opción correcta.

La expresión

$R = \{(\text{Alberto, Rocío}), (\text{Enrique, Rocío})\}$

nos permite afirmar
que
la relación dada es/no es una función,

porque

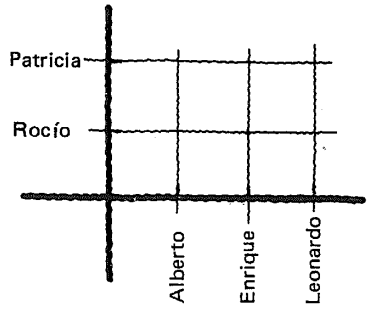
_____

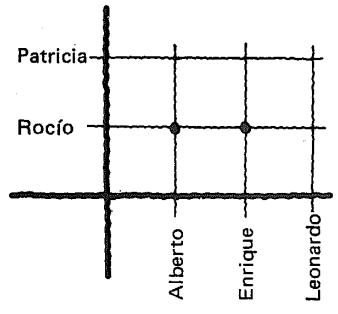
- **es**
- no hay dos pares ordenados que tengan el mismo primer componente

68

Completemos la
gráfica cartesiana de

R





69

Señalar la opción correcta.

La gráfica cartesiana
nos permite ver claramente que
la relación dada

es/no es una función,

porque

└_____┘

- **es**
- toda vertical trazada dentro del dominio, interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

70

El **dominio** de la función dada es └_____┘

Su **rango** es └_____┘

$\{$Alberto, Enrique$\}$

$\{$Rocío$\}$

2.8.2.1

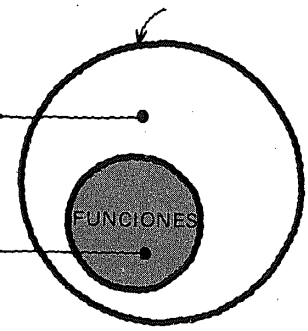
Práctica adicional,
si
se considera necesario.

71

A través de los ejercicios resueltos hemos podido observar que:

hay relaciones que **no** son funciones

y relaciones que **sí** son funciones



72

Indicar cuáles proposiciones son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F):

1. Todas las relaciones son funciones V/F
2. Algunas relaciones son funciones V/F
3. Todas las funciones son relaciones V/F

1. F
2. V
3. V

2.8.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* las funciones, de un conjunto dado de relaciones definidas por comprensión.

8.3

Notación de funciones

73

Todas las formas estudiadas
para

simbolizar relaciones

pueden ser usadas
para

simbolizar funciones.

Ver cuadros siguientes.

74

1. **Conjunto definido por extensión**
   o enumeración de sus elementos

   Por ejemplo:

   $F_1 =$ (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25),
   (6, 36), (7, 49), (8, 64), (9, 81), (10, 100)

   Podemos afirmar que esta expresión
   representa una función, porque

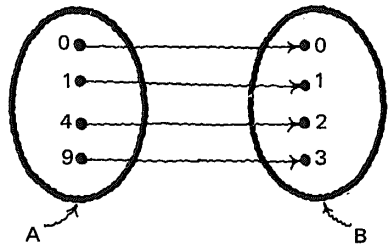
   _____

no hay dos pares ordenados que tengan el mismo primer componente

75

2. Gráfica sagital

Por ejemplo:



Podemos afirmar que esta gráfica representa una función, porque

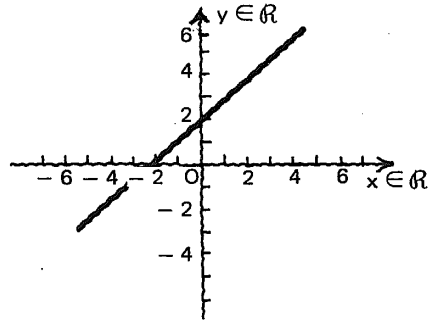
[ ]

no hay un elemento del dominio que sea origen de dos o más flechas

76

3. Gráfica cartesiana

Por ejemplo ➘



Podemos afirmar que esta gráfica representa una función, porque

[ ]

toda vertical trazada dentro del dominio ($\mathbb{R}$), interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

77

4. Conjunto definido por comprensión o descripción

Por ejemplo:

$$F_4 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 3x^2 + 2\}$$

Podemos afirmar que esta expresión representa una función, si en la gráfica cartesiana correspondiente

[ ]

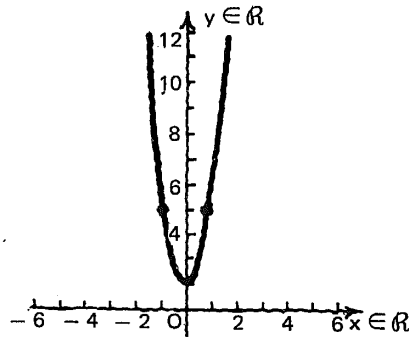
toda vertical trazada dentro del dominio, interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

véase cuadro siguiente

78

Verifiquemos lo anterior por medio de esta gráfica:

x	y
− 2	14
− 1	5
0	2
1	5
2	14



79

5. Expresión de la forma

F: A ⟶ B/regla de correspondencia

Por ejemplo:

$F_5 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/y = 2x$

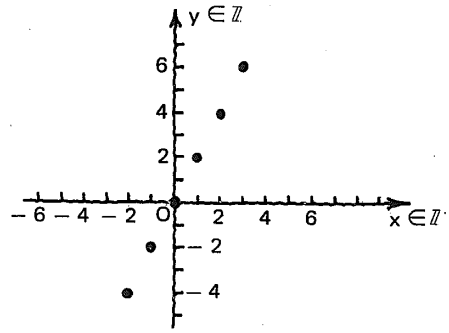
Podemos afirmar que esta expresión representa una función, si en la gráfica cartesiana correspondiente

toda vertical trazada dentro del dominio, interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

80

Verifiquemos lo anterior por medio de esta gráfica:

x	y
− 2	− 4
− 1	− 2
0	0
1	2
2	4



81

Ahora bien,
en esta expresión

$F_5 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/y = 2x$

la regla de correspondencia es

[ ]

$y = 2x$

82

Dado un elemento $\longrightarrow$ x

la expresión $y = 2x$

nos permite calcular su **imagen**

Por ejemplo:

La **imagen** de -2 es $2($ [ ] $) =$ [ ]

$2(-2) = -4$

83

En general:

la **imagen** de x es $2 \times (\ )$ [ ]

$2 \times (x) = 2x$

84

La imagen de x es 2x

Esto lo
podemos

simbolizar

así

$f(x) = 2x$

y se lee:

"efe de x es igual a 2x"

85

La expresión

$f(x) = 3x^2$

se lee:

_____

y significa:

"la imagen de _____

"efe de x es igual a $3x^2$"

"la imagen de x es $3x^2$"

86

La expresión

$f(t) = 5t^2 - 2$

se lee:

_____

y

significa:

_____

"efe de t
es igual a
$5t^2 - 2$"

"la imagen de t
es
$5t^2 - 2$"

87

La expresión

$$f_1(a) = \frac{a^2 - 1}{2}$$

se lee:

[ ]

y

significa:

[ ]

"efe uno (o efe índice uno) de a es igual a

$\frac{a^2 - 1}{2}$"

"la imagen de a es

$\frac{a^2 - 1}{2}$"

88

Similarmente,
la expresión

$$g(x) = 8x^2 - 3x$$

se leería:

[ ]

y

significaría:

[ ]

"ge de x
es igual a
$8x^2 - 3x$"

"la imagen de x
es
$8x^2 - 3x$"

89

La expresión

$$h(z) = 5(z^2 - 3)$$

se lee:

[ ]

y

significa:

[ ]

"hache de zeta
es igual a
$5(z^2 - 3)$."

"la imagen de z
es
$5(z^2 - 3)$"

90

letra griega "fi"

La expresión → $\phi(n) = \sqrt{n^2 - 1}$

se lee:

_____

y

significa:

_____

"fi de ene
es igual a
$\sqrt{n^2 - 1}$ "

" la imagen de n
es
$\sqrt{n^2 - 1}$ "

91

La expresión

$f(1) = 8$

se lee:

_____

y

significa:

_____

"efe de uno
es igual a
ocho"

"la imagen de 1
es
8"

92

La expresión

$g(-5) = 14$

se lee:

_____

y

significa:

_____

"ge de menos cinco
es igual a
catorce"

"la imagen de -5
es
14"

93

La expresión

$$f(x + 1) = x^2 + 2$$

se lee:

└_____┘

y

significa:

└_____┘

"efe de x + 1
es igual a
$x^2 + 2$

"la imagen de x + 1
es
$x^2 + 2$"

2.8.3.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

94

Atención.

Si

$$f(x) = 3x + 2$$

entonces:

$$f(1) = 3 \cdot (1) + 2 = 5$$

95

Si

$f(x) = 5x - 4$

entonces:

$f(2) =$ [ ] $=$ [ ]

$5(2) - 4 = 6$

96

Si

$g(t) = 3t^2 - t + 1$

entonces:

$g(0) =$ [ ] $=$ [ ]

$3(0)^2 - (0) + 1 = 1$

97

Si

$$\phi(n) = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$$

entonces:

$\phi(-3) =$ [ ] $=$ [ ]

$$\frac{(-3)^2 + 1}{(-3)^2 - 1} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

98

Si

$$\phi(n) = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$$

entonces:

$\phi(1) =$ [ ] $=$ [ ]

Atención.

$$\frac{(1)^2 + 1}{(1)^2 - 1} = \frac{2}{0}$$

= número no definido

99

Atención

Si

$$f(x) = x^2 - 2$$

entonces:

$f(x + 1) =$ [ ] $=$ [ ]

$(x + 1)^2 - 2$

$x^2 + 2x + 1 - 2$

$x^2 + 2x - 1$

100

Si

$$f_1(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$$

entonces:

$f_1(x - 3) =$ [ ] $=$ [ ]

$$\frac{(x - 3) + 2}{(x - 3) + 2}$$

$$\frac{x - 1}{x}$$

2.8.3.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

101

Podemos representar una función, en forma general, así:

$$F = \{(x, y)/x \in D \wedge y = f(x)\}$$

dominio

o así:

$$F: D \rightarrow C/y = f(x)$$

codominio o rango

102

Pero,
una expresión de este tipo

$$y = f(x)$$

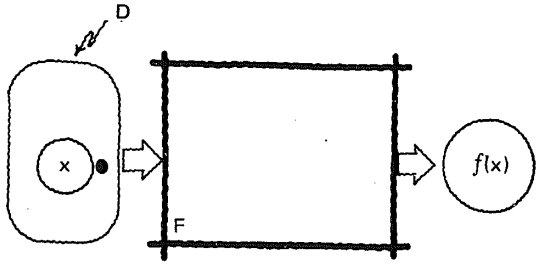
no representa una función

Hace falta especificar, al menos, el

dominio.

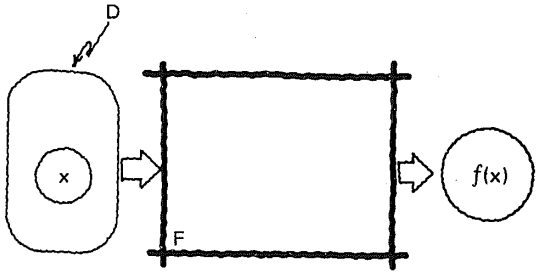
103

Imaginemos, ahora, ciertas analogías entre una función y una máquina como la bosquejada:



104

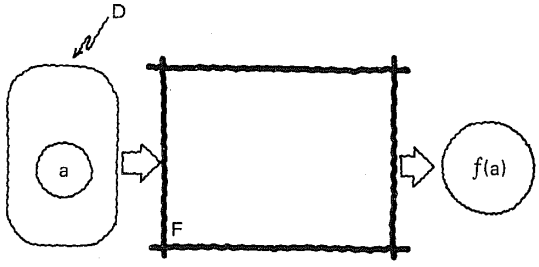
Características de esta máquina F:



Acepta únicamente elementos del conjunto D (el **dominio**).

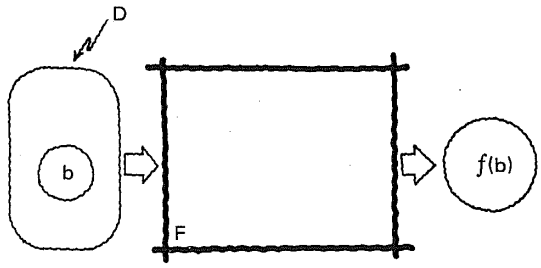
105

Un elemento a del dominio entra a la máquina y sale transformado en su imagen $f(a)$.



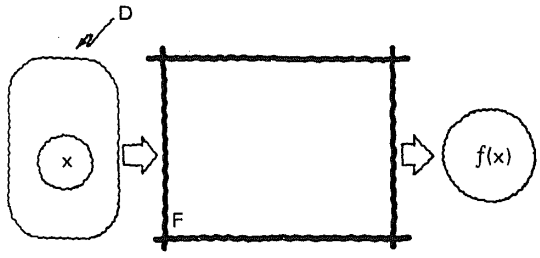
106

Un elemento b del dominio
entra a la máquina
y sale transformado en su imagen $f(b)$.



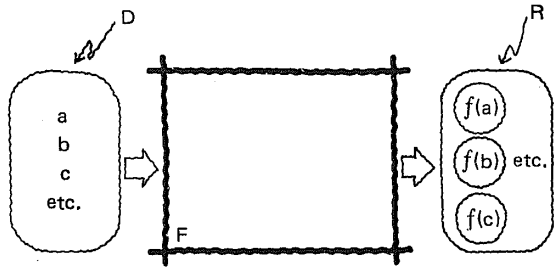
107

En general,
cualquier elemento x del dominio
entra a la máquina
y sale transformado en su imagen $f(x)$.



108

El conjunto de todas las imágenes $f(x)$,
que salen de la máquina
es el **rango.**



109

Un
ejemplo:

Sea la función

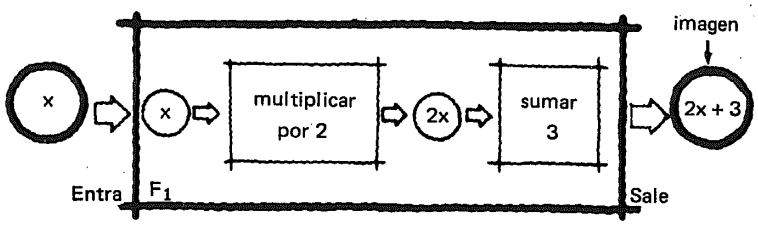
$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

$$D = \{-1, 0, 1\}$$

que vamos a interpretar como una máquina.

110

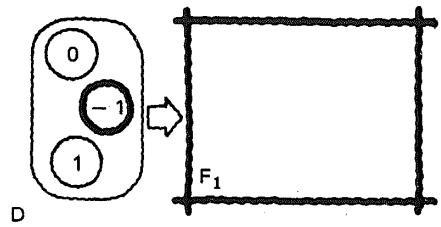
$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$



Con cada elemento del dominio que entra,
la máquina F_1 efectúa las transformaciones indicadas.

111

Tomamos el elemento -1
que la máquina aceptará
porque
pertenece al dominio D.

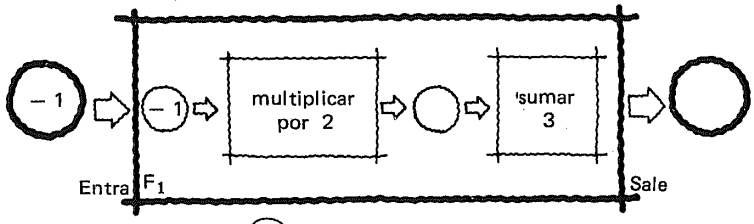


112

Completar.

$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

$D = \{-1, 0, 1\}$

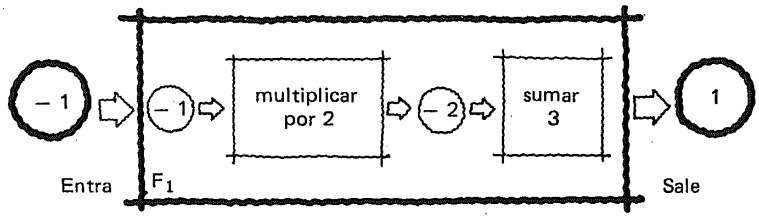


Entra el elemento (–1)
la máquina F_1 realiza las operaciones indicadas y sale transformando en su **imagen.**

Respuesta en el cuadro siguiente

$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

$D = \{-1, 0, 1\}$

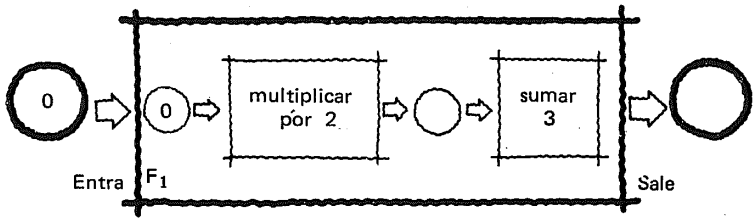


113

Completar.

$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

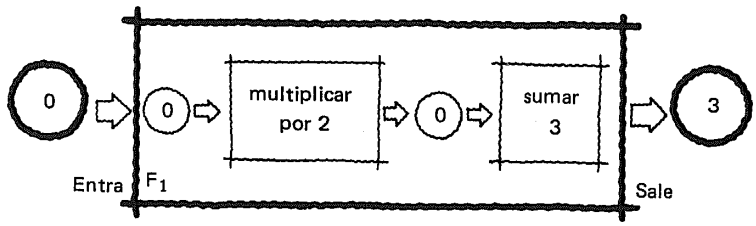
$D = \{-1, 0, 1\}$



Respuesta en el cuadro siguiente

$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

$D = \{-1, 0, 1\}$

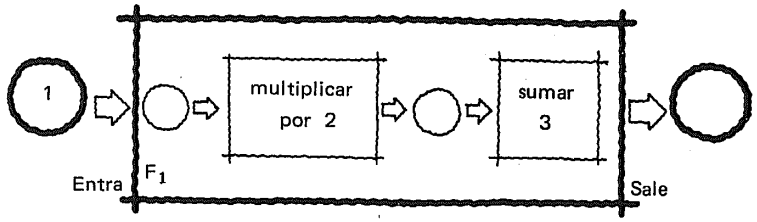


114

Completar.

$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

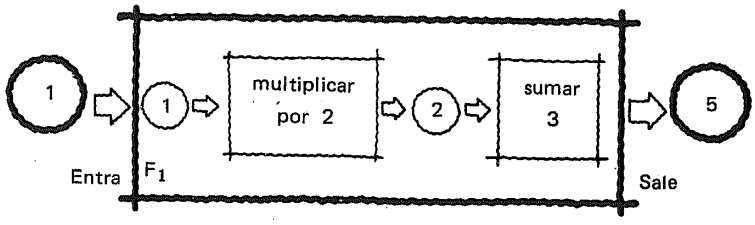
$D = \{-1, 0, 1\}$



Respuesta en el cuadro siguiente

$$F_1 = \{(x,y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

$D = \{-1, 0, 1\}$

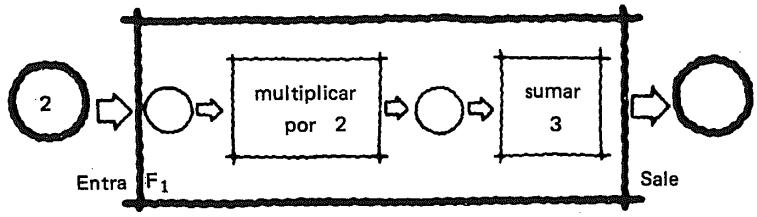


115

Completar.

$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

$D = \{-1, 0, 1\}$

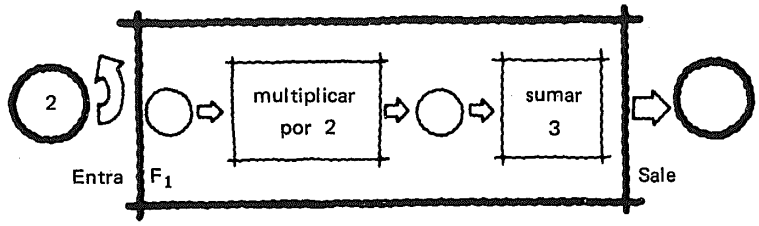


Respuesta en el cuadro siguiente

Atención.

$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

$D = \{-1, 0, 1\}$

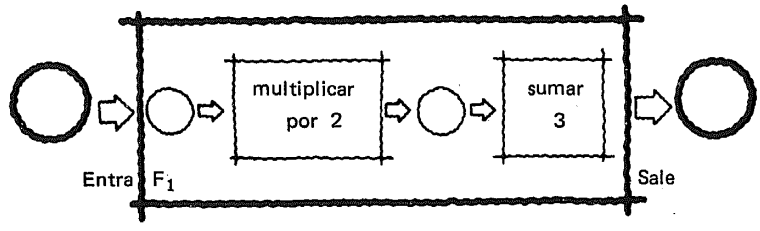


La máquina **no** acepta al elemento 2 porque **no** pertenece al dominio.

116

$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

$D = \{-1, 0, 1\}$



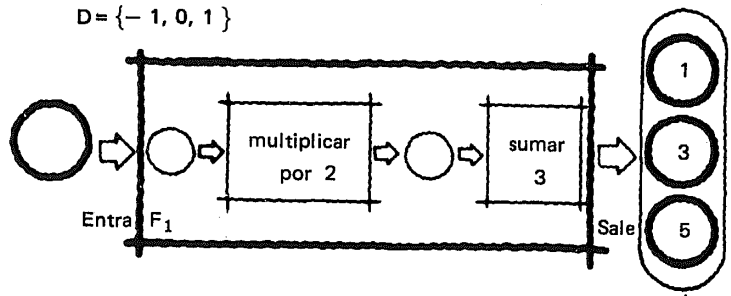
***Dominio agotado.**

117

Completar:

$$F_1 = \{(x, y)/x \in D \wedge y = 2x + 3\}$$

$D = \{-1, 0, 1\}$



El conjunto de todas las imágenes es el [ ] de la función.

rango

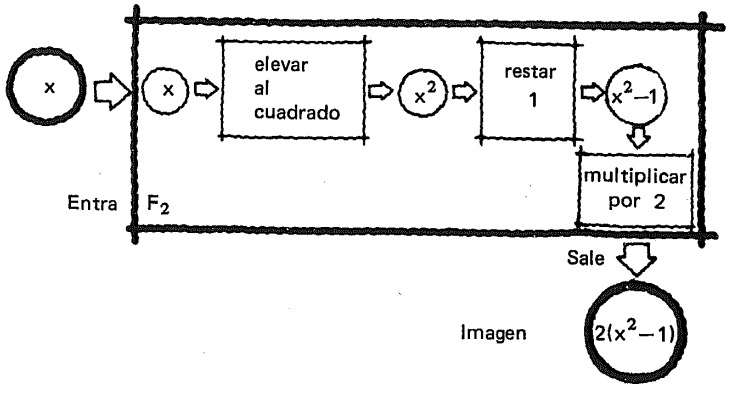
118

El esquema de funcionamiento de la máquina para la función

$$F_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = 2(x^2 - 1)\}$$

puede tener este aspecto:

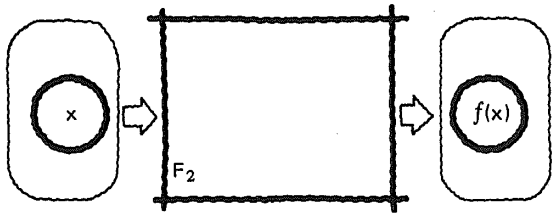
Respuesta en el cuadro siguiente



119

$F_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z}' \wedge y = 2(x^2 - 1)\}$

La máquina F_2



sólo aceptará elementos del conjunto

$\mathbb{Z}$

2.8.3.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.8.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *expresar* una función:

  – como conjunto definido por extensión,
  – como conjunto definido por comprensión,
  – en la forma F: $A \longrightarrow B/y = f(x)$
  – por medio de una gráfica sagital,
  – por medio de una gráfica cartesiana.

8.4

Algunas clases de funciones

120

En las expresiones:

$$F = \{(x, y)/x \in D \wedge y = f(x)\}$$

o

$$F: D \rightarrow C/y = f(x)$$

la forma que adopte **la regla de correspondencia**

$$y = f(x)$$

nos permitirá definir algunas clases de funciones.

121

Si

$$y = f(x)$$

adopta la forma

$$\boxed{y = c}$$

en que **c** es un número real

la función recibe el nombre de

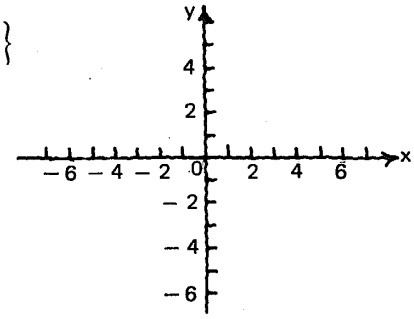
función constante

122

Ejemplo.

Completar la gráfica cartesiana de

$F_1 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 3\}$



Respuesta en el cuadro siguiente

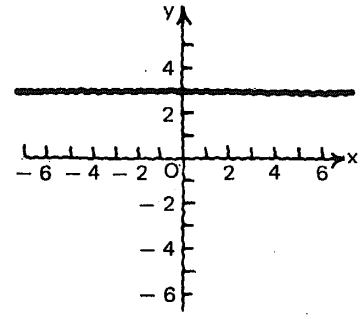
Gráfica cartesiana de

$F_1 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 3\}$

en que

$y = 3$

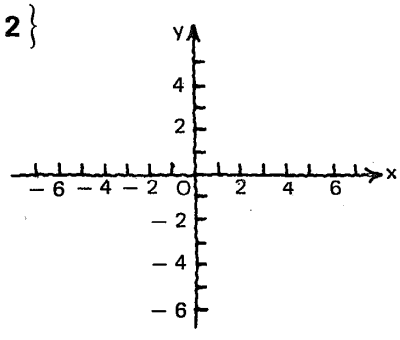
para cualquier valor de x.



123

Completar la gráfica cartesiana de

$F_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = -2\}$



Respuesta en el cuadro siguiente

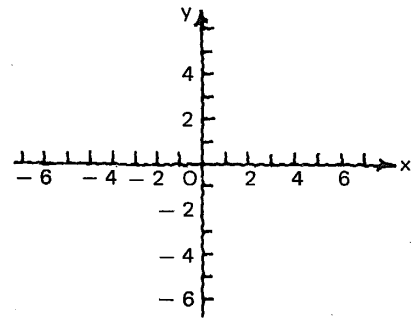
Gráfica cartesiana
de

$F_2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = -2\}$

en que

$y = -2$

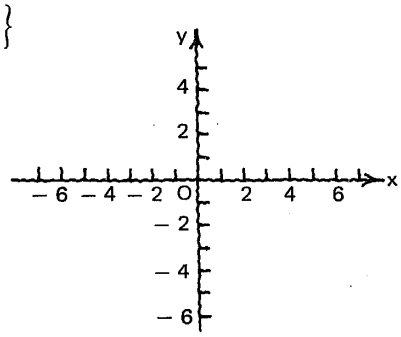
para cualquier valor de x.



124

Completar la
gráfica cartesiana
de

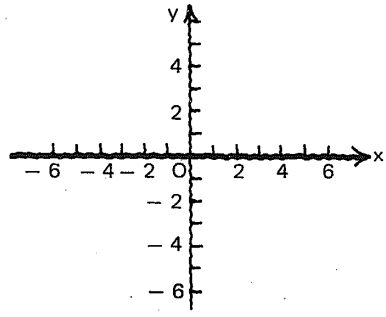
$F_3 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 0\}$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Gráfica cartesiana
de

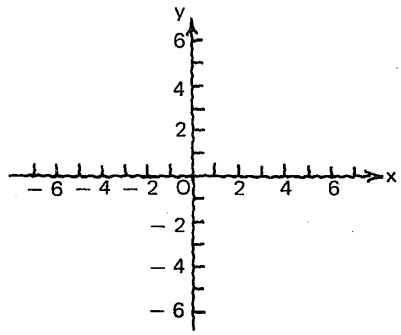
$F_3 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 0\}$



125

Completar la gráfica cartesiana de

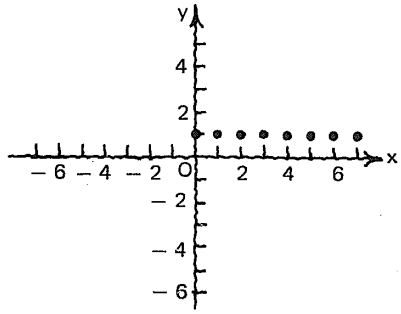
$F_4 = \{(x, y)/x \in \mathbb{N} \wedge y = 1\}$



126

Gráfica cartesiana de

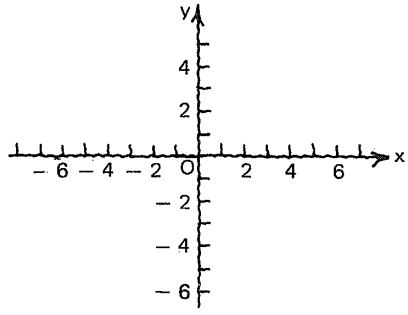
$F_4 = \{(x, y)/x \in \mathbb{N} \wedge y = 1\}$



127

Completar la gráfica cartesiana de

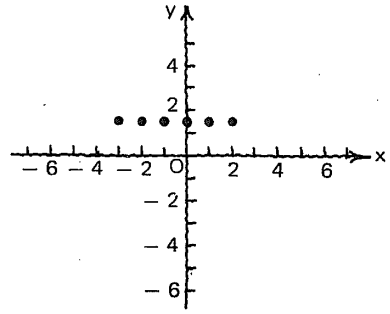
$F_5 = \left\{(x, y)/\ x \in \mathbb{Z}, -3 \leqslant x \leqslant 2\ \wedge y = \frac{3}{2}\right\}$



Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica cartesiana de

$$F_5 = \left\{ (x, y)/x \in \mathbb{Z}, \; -3 \leqslant x \leqslant 2 \wedge y = \frac{3}{2} \right\}$$



128

La gráfica cartesiana
de una funcion **constante**
representada por

$$F = \left\{ (x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = c \right\}$$

o por

$$F = \mathbb{R} \to \mathbb{R}/y = c$$

es una recta

paralela al eje de las x.

129

Si

$$y = f(x)$$

adopta la forma

$$y = ax + b$$

en que **a** y **b** son números reales

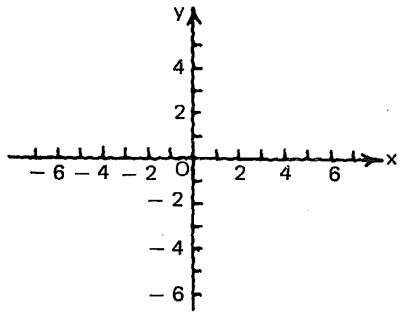
la función recibe el nombre de

función lineal

130

Ejemplo.

Completar la gráfica cartesiana de $F_7 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 2x - 3\}$

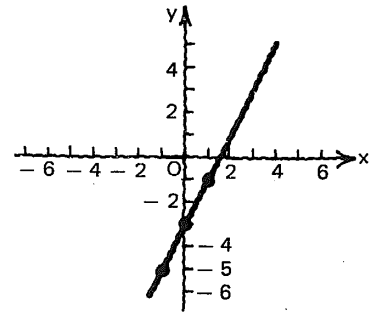


Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica cartesiana de

$$F_7 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 2x - 3\}$$

x	y
– 1	– 5
0	– 3
1	– 1



131

La gráfica cartesiana de una funcion **lineal** representada por

$$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = ax + b\}$$

o por

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/y = ax + b$$

es una **recta.**

132

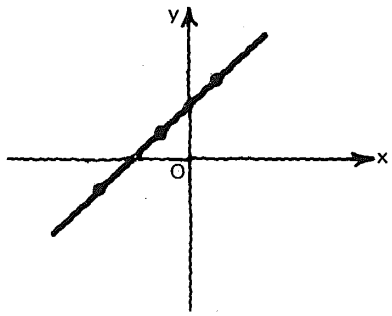
Para el trazo de la gráfica cartesiana de una función lineal basta con trazar

dos puntos

y

un tercero

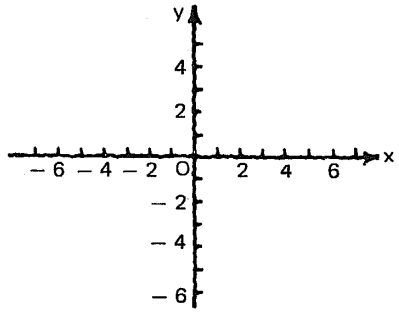
para comprobación.



133

Trazar la gráfica cartesiana de

$$F_8 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = x + 2\}$$

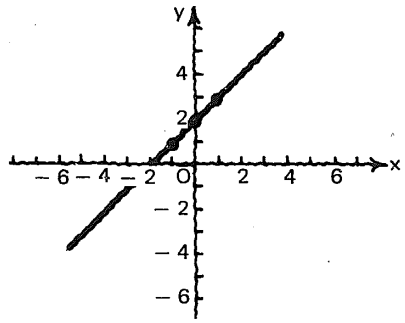


Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica cartesiana de

$$F_8 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = x + 2\}$$

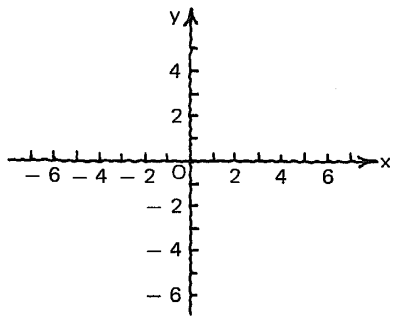
x	y
– 1	1
0	2
1	3



134

Trazar la gráfica cartesiana de

$F_9 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / y = -4x + 2$

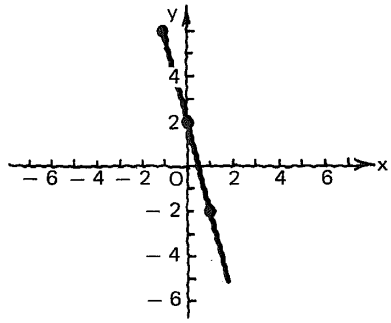


Respuesta
en el
cuadro siguiente

Gráfica cartesiana
de

$F_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = -4x + 2$

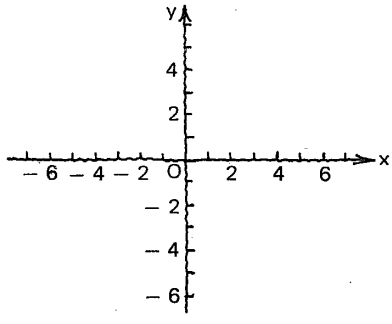
x	y
– 1	6
0	2
1	– 2



135

Trazar la gráfica cartesiana de

$F_{10} = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = 3x + 1\}$

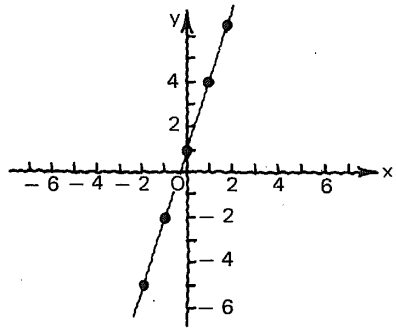


Respuesta
en el
cuadro siguiente

Gráfica cartesiana
de

$$F_{10} = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \wedge y = 3x + 1\}$$

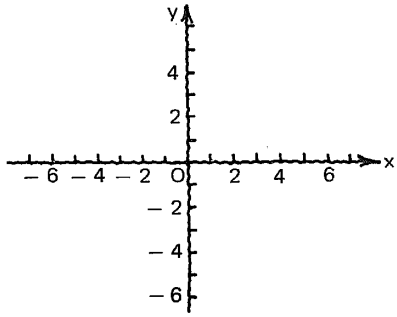
x	y
1	— 2
0	1
1	4



136

Trazar la gráfica cartesiana de

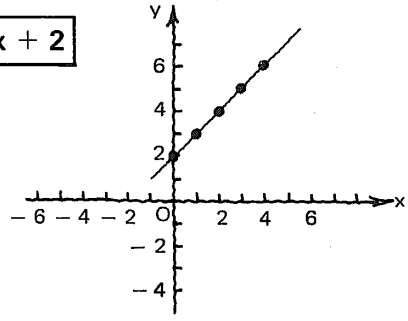
$F_{11} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}/y = x + 2$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

$F_{11} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}/y = x + 2$

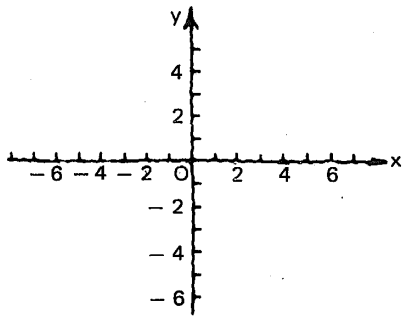
x	y
0	2
1	3
2	4



137

Trazar la gráfica cartesiana de

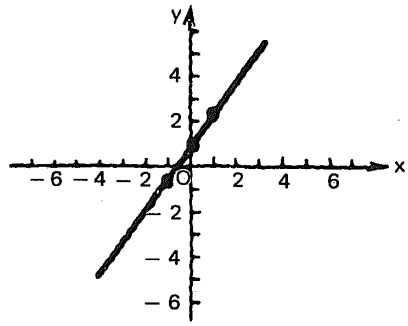
$$F_{12} = \left\{ (x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{3}{2}x + 1 \right\}$$



Respuesta en el cuadro siguiente

$$F_{12} = \left\{ (x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{3}{2}x + 1 \right\}$$

x	y
− 1	− 1/2
0	1
1	5/2



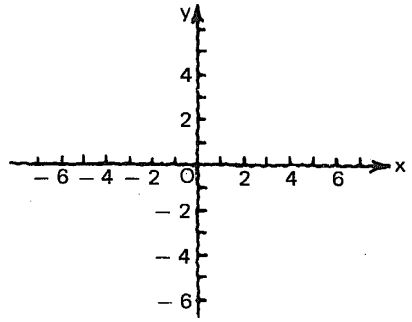
138

Trazar la gráfica cartesiana de

$F_{13}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/x + 2y = 5$

y expresar la regla de correspondencia en la forma

$y = ax + b.$

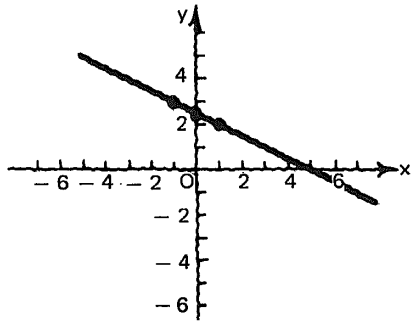


Respuesta en el cuadro siguiente

$F_{13}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/x + 2y = 5$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

x	y
− 1	3
0	5/2
1	2



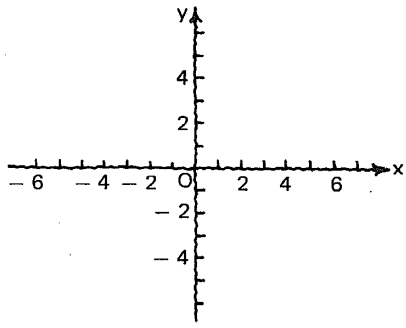
2.8.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

139

Trazar la gráfica
cartesiana de

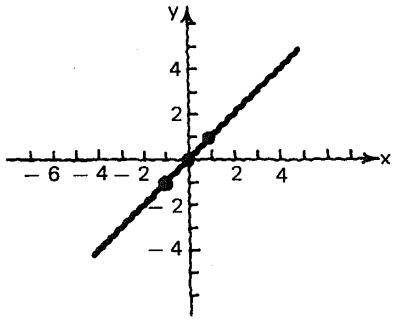
$F_{14}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/y = x$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

$F_{14}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/y = x$

x	y
− 1	− 1
0	0
1	1



140

Si

$$y = f(x)$$

adopta la forma

$$y = x$$

(es decir: $a = 1$ y $b = 0$ en $y = ax + b$)

la función recibe el nombre de

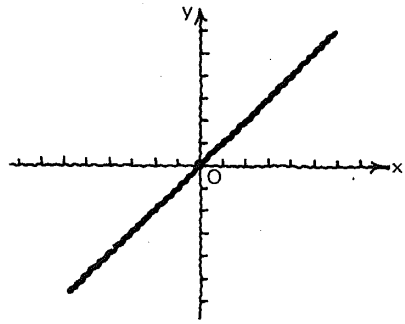
función identidad

141

Gráfica cartesiana
de la función **identidad**
representada por

$$F = \{(x,y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = x\}$$

$$F: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/y = x$$



142

Si

$$y = f(x)$$

adopta la forma

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

en que a, b, c son números reales

la función recibe el nombre de

función cuadrática

143

Completar la gráfica cartesiana de

$$F_{15} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$$

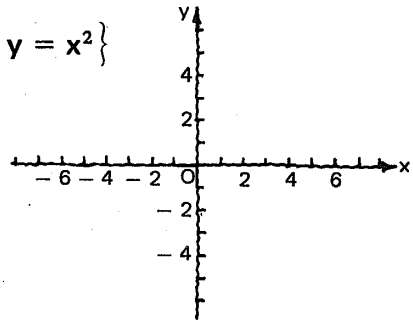
Es decir que, en

$y = ax^2 + bx + c$

$a = 1$

$b = 0$

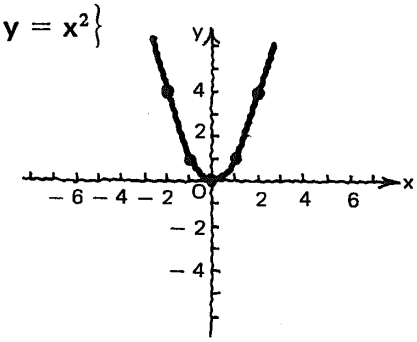
$c = 0$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$F_{15} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$$

x	y
– 2	4
– 1	1
0	0
1	1
2	4



144

La gráfica cartesiana
de
una funcion **cuadrática**
representada por

$$F = \{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = ax^2 + bx + c\}$$

o por

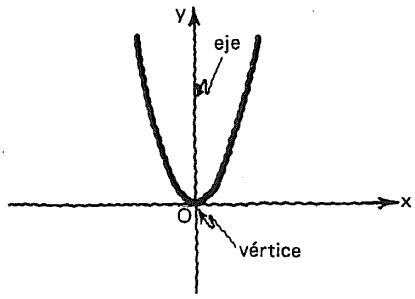
$$F: \mathcal{R} \to \mathcal{R}/y = ax^2 + bx + c$$

es una curva abierta llamada

parábola.

145

Una parábola



146

Completar la gráfica cartesiana de

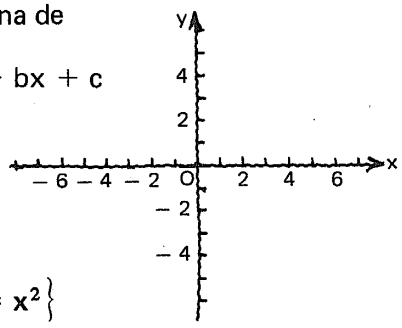
Es decir que, en $y = ax^2 + bx + c$

$a = -1$

$b = 0$

$c = 0$

$F_{16} = \{(x,y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = x^2\}$

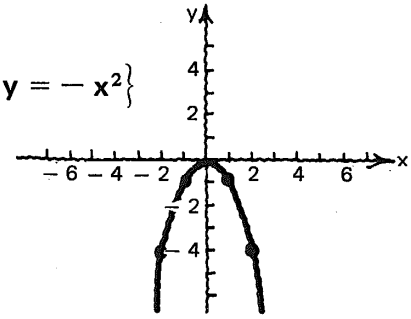


Respuesta
en el
cuadro siguiente

Observemos el efecto que produce en la forma de la figura el signo de a.

$F_{16} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge \quad \mathbf{y = -x^2}\}$

x	y
− 2	− 4
− 1	− 1
0	0
1	− 1
2	− 4



147

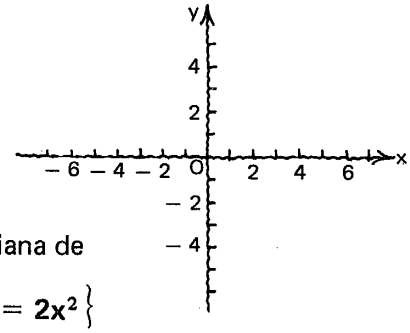
Ahora, en

$y = ax^2 + bx + c$

$a = 2$
$b = 0$
$c = 0$

Completar la gráfica cartesiana de

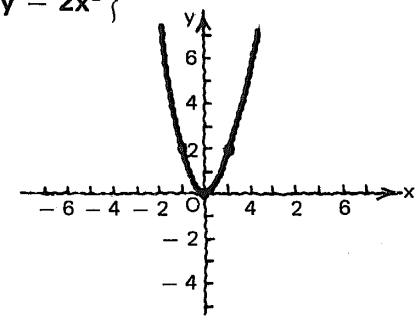
$F_{17} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{y = 2x^2}\}$



Respuesta en el cuadro siguiente

$F_{17} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{y = 2x^2}\}$

x	y
− 2	8
− 1	2
0	0
1	2
2	8



148

$y = ax^2 + bx + c$

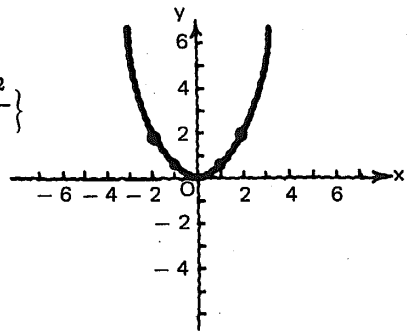
$a = 1/2$

$b = 0$

$c = 0$

$F_{18} = \left\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y \frac{x^2}{2}\right\}$

x	y
− 2	2
− 1	1/2
0	0
1	1/2
2	2



149

$y = ax^2 + bx + c$

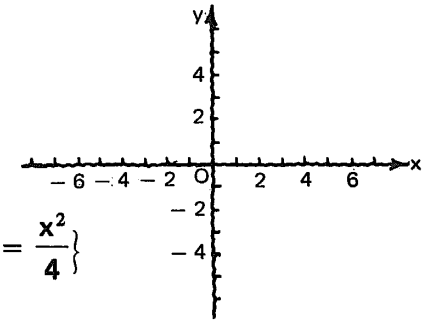
$a = 1/4$

$b = 0$

$c = 0$

$F_{19} = \left\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{x^2}{4}\right\}$

Completar
la gráfica cartesiana.

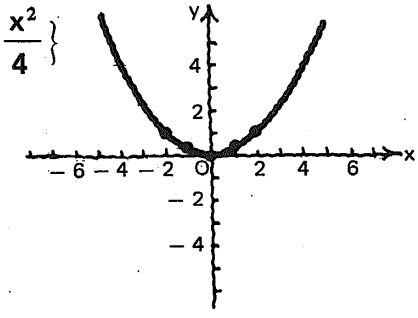


Respuesta
en el
cuadro siguiente

Observemos con atención el efecto que a tiene en la forma de la parábola.

$F_{19} = \left\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{x^2}{4}\right\}$

x	y
− 2	1
− 1	1/4
0	0
1	1/4
2	1



150

$y = ax^2 + bx + c$

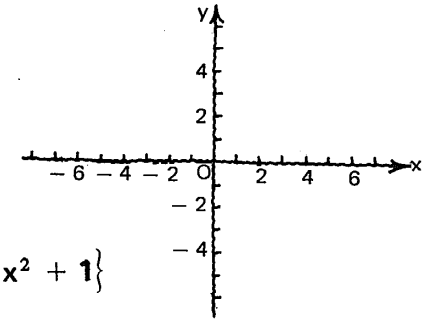
$a = 1$

$b = 0$

$c = 1$

$F_{20} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2 + 1\}$

Completar
la gráfica cartesiana.

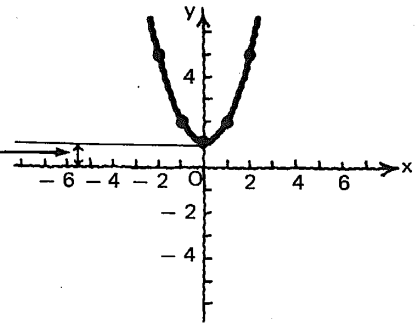


Respuesta
en el
cuadro siguiente

Tomemos nota del efecto que produce **c** en la forma de la parábola.

$F_{20} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2 + 1\}$

x	y
– 2	5
– 1	2
0	1
1	2
2	5



151

$y = ax^2 + bx + c$

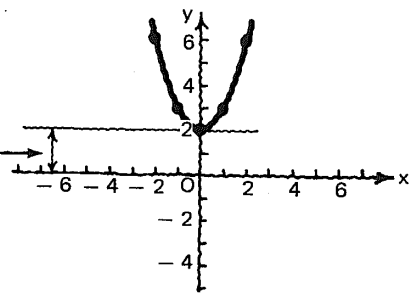
$a = 1$

$b = 0$

$c = 2$

$F_{21} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2 + 2\}$

x	y
– 2	6
– 1	3
0	2
1	3
2	6



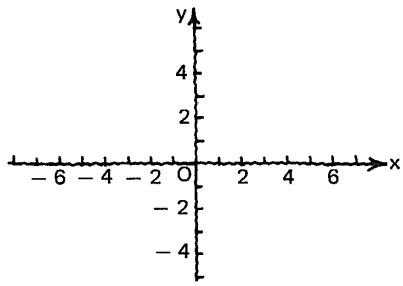
152

$y = ax^2 + bx + c$

$a = 1/4$

$b = -1$

$c = -2$



$$F_{22} = \left\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = \frac{x^2}{4} - x - 2\right\}$$

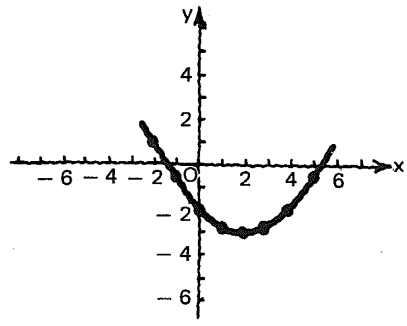
Completar la
gráfica cartesiana.

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$F_{22}=\left\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = \frac{x^2}{4} - x - 2\right\}$$

x	y
– 2	1
– 1	– 3/4
0	– 2
1	– 11/4
2	– 3

x	y
3	– 11/4
4	– 2
5	– 3/4



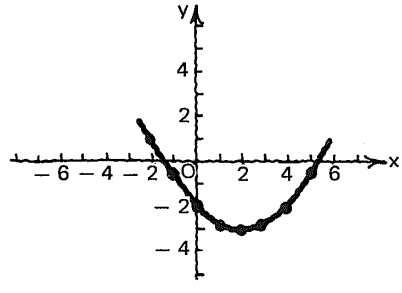
153

Trazar el eje y señalar
el vértice de la parábola.

$$F_{22}=\left\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = \frac{x^2}{4} - x - 2\right\}$$

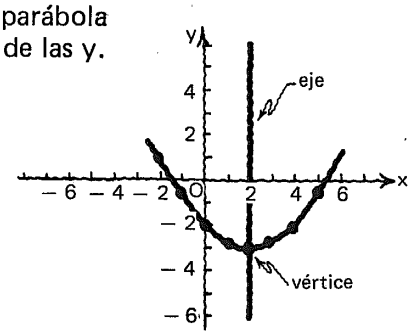
x	y
– 2	1
– 1	– 3/4
0	– 2
1	– 11/4
2	– 3

x	y
3	– 11/4
4	– 2
5	– 3/4



Ver respuesta en el cuadro siguiente

Observemos que la presencia del término en x indica que el eje de la parábola no coincide con el eje de las y.



$$F_{22} = \left\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{x^2}{4} - x - 2\right\}$$

154

Vamos ahora a efectuar una

transformación

de la expresión

$$y = \frac{x^2}{4} - x - 2$$

en otra equivalente de la forma

$$y = a(x - h)^2 + k$$

155

Estado inicial:

$$y = \frac{x^2}{4} - x - 2$$

Transformaciones

Modelo del estado final:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Transformaciones:

1. Expresar la igualdad original como el producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de x^2.

Respuesta en el cuadro siguiente

156

Respuesta →

$$y = \frac{1}{4}(x^2 - 4x - 8)$$

Modelo del estado final:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

2. Sumar y restar un término t^2 a la expresión que está entre paréntesis, de modo que "se complete" un trinomio cuadrado perfecto:

$$y = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + t^2 - 8 - t^2)$$

trinomio cuadrado perfecto

Ver respuesta en el cuadro siguiente.

157

Respuesta →

$$y = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4 - 8 - 4)$$

trinomio cuadrado perfecto

Modelo del estado final:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

3. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto resultante.

Ver respuesta en el cuadro siguiente.

Respuesta →

$$y = \frac{1}{4}\left[(x - 2)^2 - 8 - 4\right]$$

Modelo del estado final:

$$y = a\,(x - h)^2 + k$$

4. Efectuar la transformación faltante, de acuerdo con el modelo.

158

Estado final: $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3$ ⟷ Modelo del estado final: $y = a(x-h)^2 + k$

$a =$ ⌊____⌋

$h =$ ⌊____⌋

$k =$ ⌊____⌋

$\frac{1}{4}$

2

-3

159

Consideremos nuevamente la gráfica cartesiana del cuadro 153.

160

Observar con atención.

$$F_{22} = \left\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge \underbrace{y = \frac{x^2}{4} - x - 2}\right\}$$

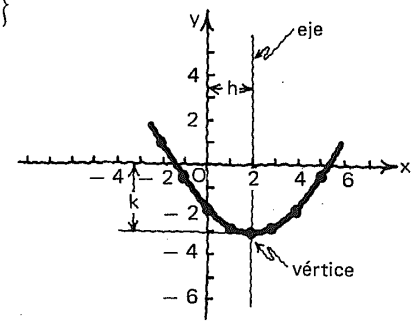
Expresión equivalente

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3$$

de la forma

$$y = a(x-h)^2 + k$$

en que: $h = 2$ y $k = -3$.



161

Tracemos ahora
la gráfica de
la parábola

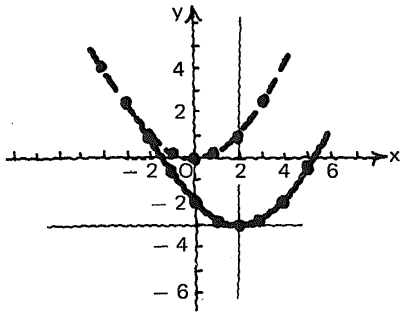
$$y = \frac{1}{4}x^2$$

sobre el sistema
cartesiano del
cuadro anterior.

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Observemos que la parábola:

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3$$



tiene "la misma forma"
que la parábola:

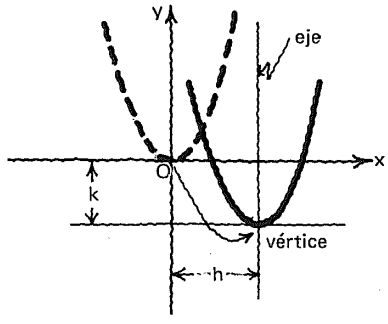
$$y = \frac{1}{4}x^2$$

pero con el vértice
traslado del origen al punto
(2, – 3)

162

En general,
la gráfica de la parábola
representada por

$$y = a(x-h)^2 + k$$



tiene "la misma forma"
que la de la parábola
representada por

$$y = ax^2$$

con su vértice "trasladado" al punto $\boxed{(h, k)}$

163

Entonces,
para trazar la

gráfica cartesiana
de una función de la forma

$$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = ax^2 + bx + c\}$$

conviene expresarla primero así:

$$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = a(x - h)^2 + k\}$$

164

Por ejemplo,
se requiere trazar

la **gráfica cartesiana** de

$$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 2x^2 - 12x + 19\}$$

Obtenemos, primero, la
expresión equivalente
de la forma

$y = a(x - h)^2 + k$ ____

$y = 2\left(x^2 - 6x + \frac{19}{2}\right)$

$y = 2\left(x^2 - 6x + 9 + \frac{19}{2} - 9\right)$

$y = 2\left[(x - 3)^2 + \frac{1}{2}\right]$

$y = 2(x - 3)^2 + 1$

165

Sabemos que
la gráfica cartesiana
correspondiente a

$$y = 2(x - 3)^2 + 1$$

tiene la misma forma
que la
correspondiente a

____

$y = 2x^2$

pero con su vértice en

____

(3, 1)

166

Completar la tabla para $y = 2x^2$:

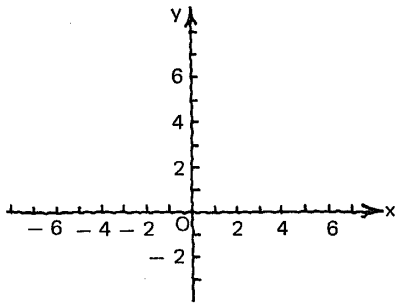
x	$y = 2x^2$
− 2	
− 1	
0	
1	
2	

x	$y = 2x^2$
− 2	8
− 1	2
0	0
1	2
2	8

167

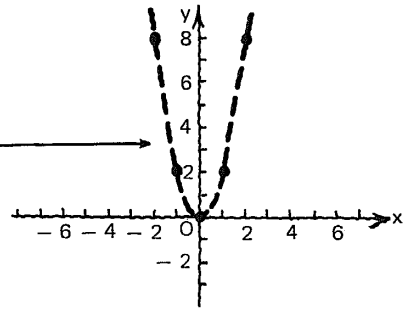
Completar la gráfica cartesiana de:

$y = 2x^2$



Respuesta en el cuadro siguiente

Parábola correspondiente a $y = 2x^2$

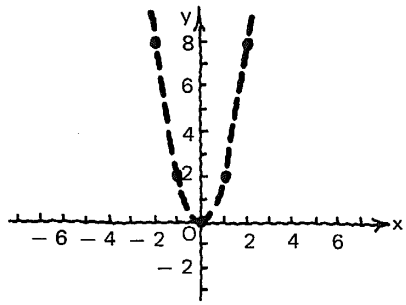


168

Trazar ahora la parábola correspondiente a

$y = 2(x - 3)^2 + 1$

cuyo vértice estará en el punto

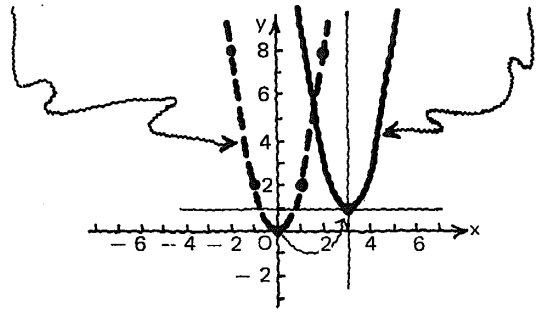


(3, 1)

Ver gráfica en el cuadro siguiente

Gráfica correspondiente a

$y = 2x^2$



Gráfica correspondiente a

$y = 2x^2 - 12x + 19$

con vértice en el punto (3, 1)

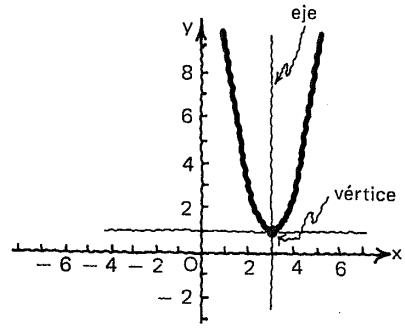
169

Ésta es la

gráfica cartesiana

de la función

$\{x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 2x^2 - 12x + 19\}$



2.8.4.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

170

Ahora
consideremos el
problema
cuya

solución

habíamos dejado

inconclusa

en el módulo 2.7.

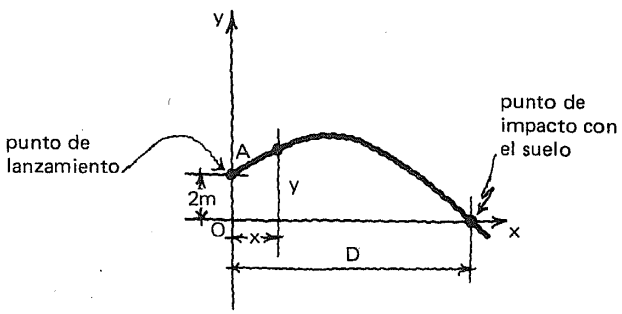
171

La expresión

$$y = -0.12x^2 + 1.2x + 2$$

$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant D$$

nos da la posición de un proyectil arrojado desde el punto A, en un instante determinado de su recorrido.

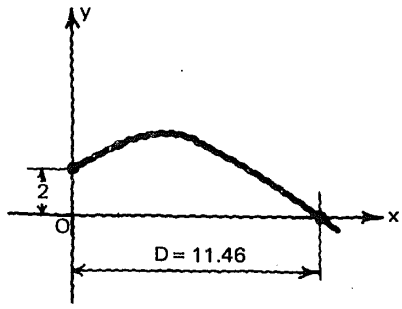


172

Habíamos encontrado que:
el punto de impacto es
(D,0)
en que

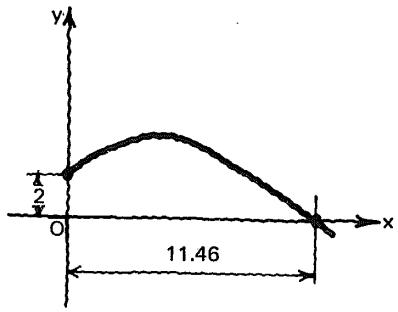
D = 11.46 (metros)

(para y = 0).



173

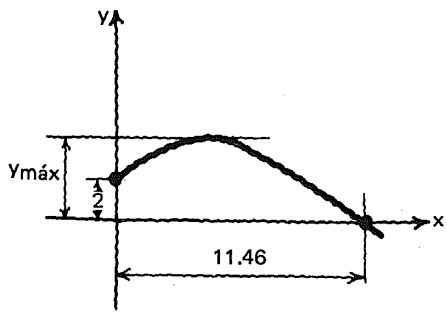
Eso
nos permitió
determinar
que
el **dominio**
de la relación
es



$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 11.46\}$

174

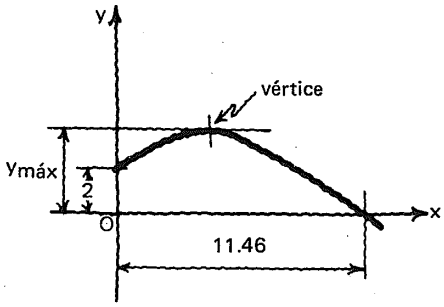
Para determinar el **rango**
es necesario conocer $y_{máx}$
(altura máxima alcanzada
por el proyectil).



175

Observemos que

$y_{máx}$
es la ordenada
del **vértice** de la parábola:



176

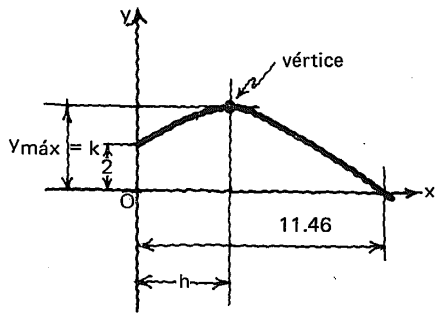
$$y = -0.12x^2 + 1.2x + 2$$

Las coordenadas del

vértice h, k

quedarán determinadas
si
expresamos la igualdad en la forma

$$y = a(x - h)^2 + k$$



177

$$y = -0.12x^2 + 1.2x + 2$$

Expresión equivalente
de la forma
$y = a(x - h)^2 + k$:

$$y = -0.12\left(x^2 - 10x - \frac{50}{3}\right)$$

$$y = -0.12\left(x^2 - 10x + 25 - \frac{50}{3} - 25\right)$$

$$y = -0.12\left[(x - 5)^2 - \frac{125}{3}\right]$$

$$y = -0.12(x - 5)^2 + 5$$

178

Las coordenadas del

vértice

(en este caso, el punto más alto)
de la parábola
son:

h = [ ]

k = [ ]

5

5

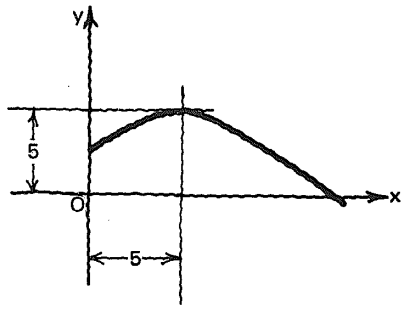
179

El

rango

de la relación
es,
entonces:

[ ]



$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

180

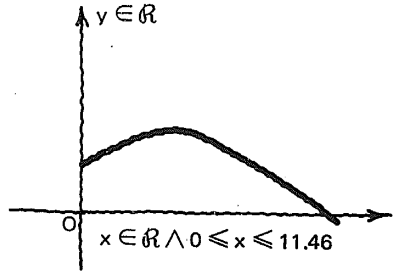
Ahora bien,
la relación

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 11.46 \wedge y = -0.12x^2 + 1.2x + 2\}$

cuya gráfica cartesiana
tiene este aspecto

es/no es una **función**,

porque [ ]



- **es**
- toda vertical trazada "dentro del dominio" intersecta a la gráfica en un punto y sólo uno

181

Si

$$y = f(x)$$

adopta la forma

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

con exponentes $\in \mathbb{N}$

la función recibe el nombre de

función polinomia

182

En realidad,
las funciones que hemos estudiado
son

casos particulares

de

funciones polinomias.

183

En

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

si $n = 2$

la expresión toma la forma

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

o bien:

$$y = ax^2 + bx + c$$

y corresponde a una función

cuadrática

184

En

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0$$

si $n = 1$

la expresión toma la forma

└_____┘

y corresponde a una función

└_____┘

$y = a_1 x + a_0$

o bien:

$y = ax + b$

lineal

185

En

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

si $n = 0$

la expresión toma la forma

└_____┘

y corresponde a la función

└_____┘

$y = a_0$

o bien:

$y = c$

constante

186

Las funciones

polinomias

de grado superior al segundo

$(n > 2)$

serán estudiadas en detalle
más
adelante.

187

Si

$$y = f(x)$$

adopta la forma

$$\boxed{y = |x|}$$

la función recibe el nombre de

función valor absoluto

188

Recordemos que
el símbolo

$|x|$

representa un número **no negativo**
(positivo o cero):

Si $x \geqslant 0$ entonces $|x| = x$

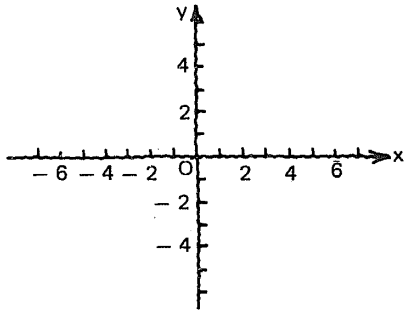
Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$

189

Completemos la tabla y
tracemos la gráfica cartesiana
de

$$\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = |x|\}$$

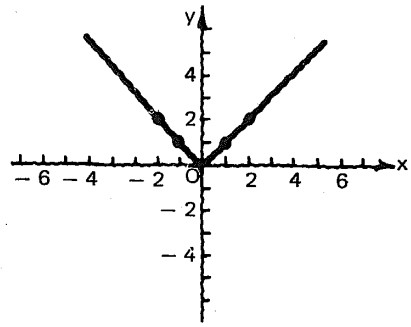
x	y = |x|
− 2	
− 1	
0	
1	
2	



Respuesta
en el
cuadro siguiente

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = |x|\}$

x	y = |x|
− 2	2
− 1	1
0	0
1	1
2	2



2.8.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *trazar* la gráfica cartesiana de una función identificada como:

  — constante,
  — lineal,
  — cuadrática, o,
  — valor absoluto.

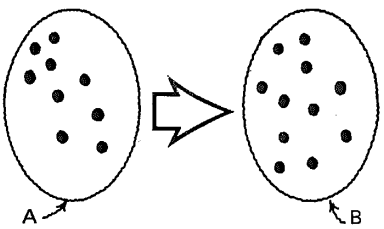
8.5

Clasificación de las funciones (suprayección, inyección y biyección)

190

Si
consideramos
un par de conjuntos
A, B
al relacionarlos, puede ocurrir
alguna de las 5 cosas siguientes,

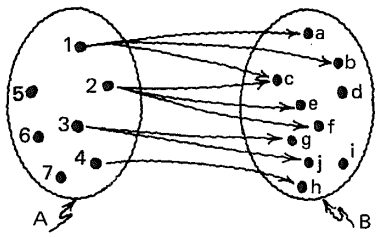
Estudiar con atención cada uno de los cuadros que siguen.



191

1. De cada elemento de A parte **un número indiferente** de flechas.

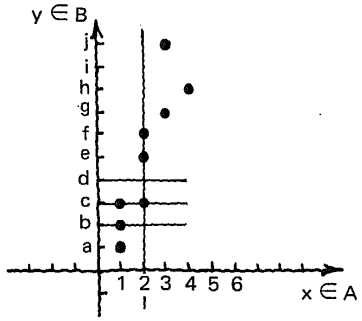
A cada elemento de B llega un **número indiferente de** flechas.



A esto le llamamos una **relación cualquiera.**

192

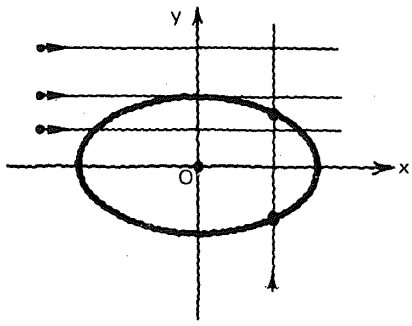
Gráfica cartesiana de una **relación cualquiera.**



193

Ejemplo de una

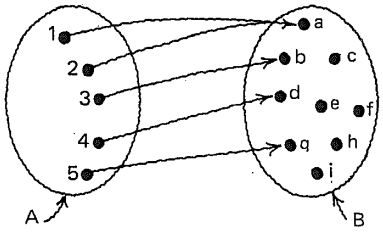
relación cualquiera.



194

2. De cada elemento de A parte **una y sólo una** flecha.

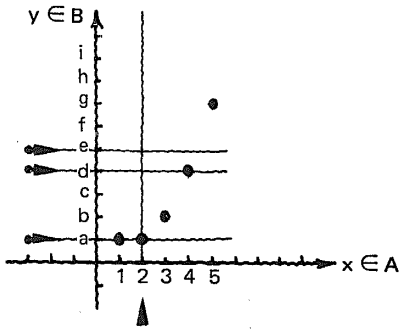
A cada elemento de B llega un **número indiferente** de flechas.



A esto le daremos el nombre de **función cualquiera.**

195

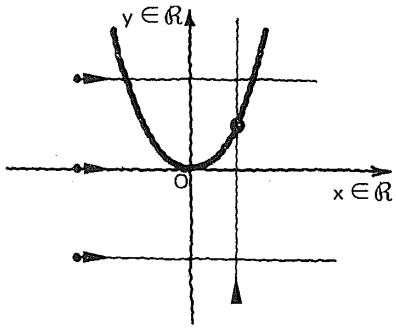
Gráfica cartesiana
de
una
función
cualquiera.



196

Ejemplo de una

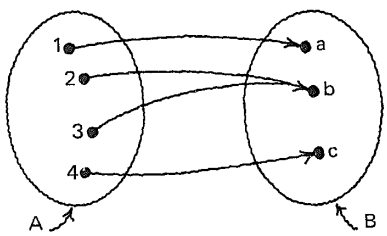
función cualquiera.



197

3. De cada elemento de A parte **una y sólo una** flecha.

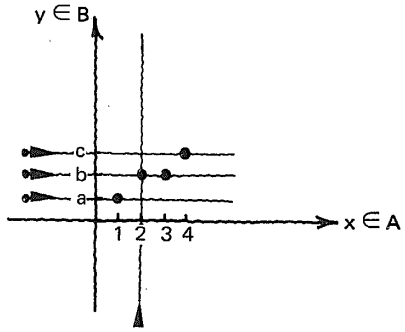
A cada elemento de B llega **al menos una** flecha.



A esto le llamamos una **función suprayectiva.**

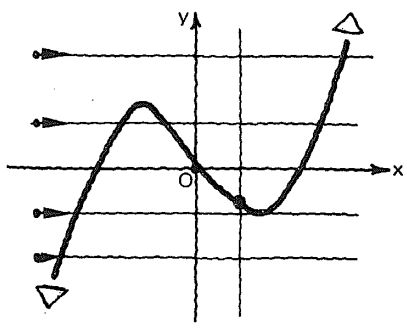
198

Gráfica cartesiana de una **función suprayectiva o suprayección.**



199

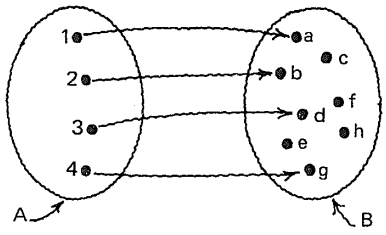
Ejemplo de una **suprayección.**



200

4. De cada elemento de A parte **una y sólo una** flecha.

A cada elemento de B llega **una flecha como máximo.**



A esto le llamamos una **función inyectiva**

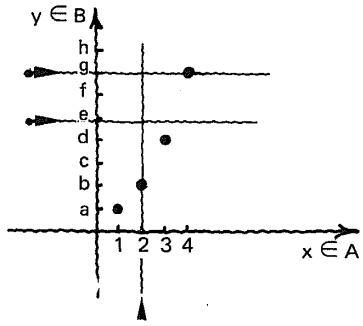
201

Gráfica cartesiana
de
una

función
inyectiva

o

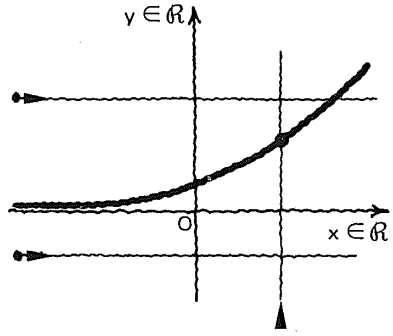
inyección.



202

Ejemplo

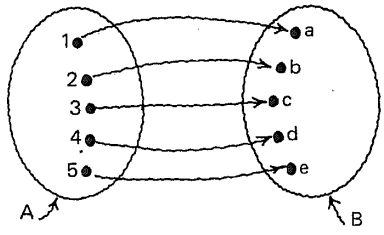
de una **inyección.**



203

5 De cada elemento de A sale **una y sólo una** flecha.

A cada elemento de B llega **una y sólo una** flecha.



A esto le llamamos una **función biyectiva.**

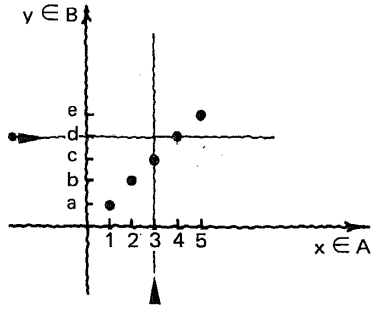
204

Gráfica cartesiana
de
una
función

biyectiva

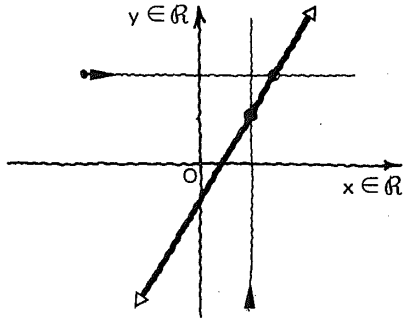
o

biyección.



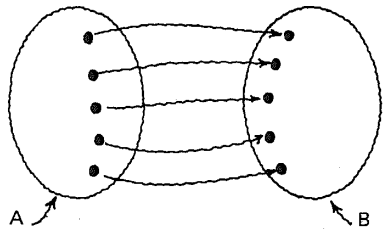
205

Ejemplo de una
biyección.



206

Observemos que
para que una función
sea **biyectiva**
los dos conjuntos deben
tener el
mismo número de elementos
(es decir, la misma cardinalidad)



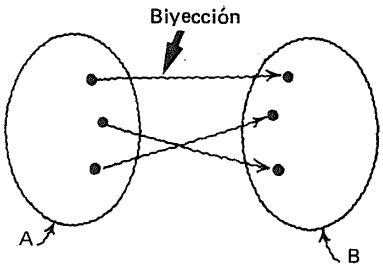
207

Decimos que:
puede establecerse una

correspondencia uno a uno

(correspondencia biunívoca)
entre los elementos de los
dos conjuntos o que
los dos conjuntos son

coordinables
o
equivalentes.

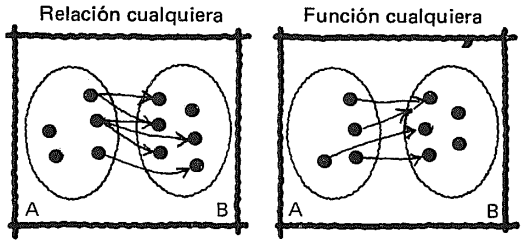


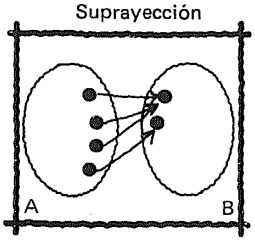
208

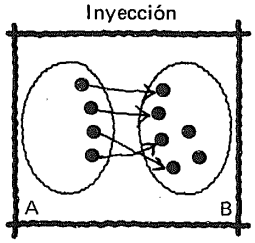
En los tres cuadros siguientes
encontramos
un
resumen
de las cinco clases de relaciones
estudiadas.

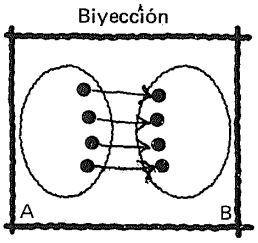
209

Resumen
de
relaciones
y funciones.









210

Resumen de relaciones y funciones.

Relación cualquiera	
De cada elemento de A sale un número indiferente de flechas.	A cada elemento de B llega un número indiferente de flechas.

Función cualquiera	
De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.	A cada elemento de B llega un número indiferente de flechas.

Suprayección	
De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.	A cada elemento de B llega al menos una flecha.

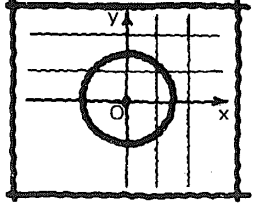
Inyección	
De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.	A cada elemento de B llega una flecha como máximo.

Biyección	
De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.	A cada elemento de B llega una flecha y sólo una.

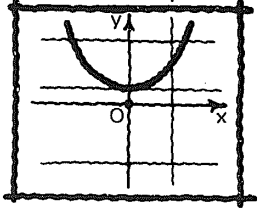
211

Resumen de relaciones y funciones en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

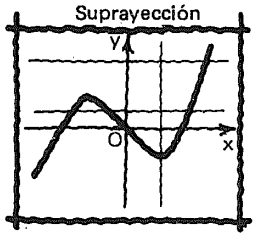
Relación cualquiera



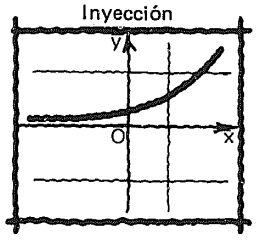
Función cualquiera



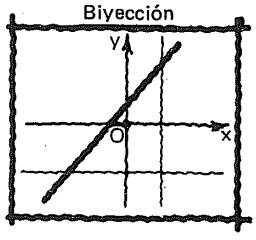
Suprayección



Inyección

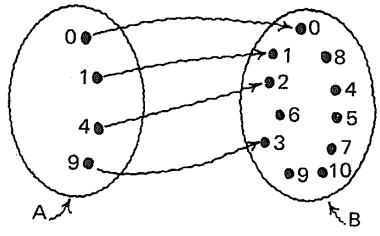


Biyección



212

Señalar la opción correcta.



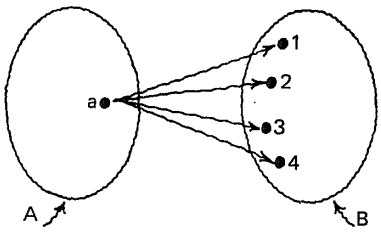
Esta gráfica sagital representa:

- una relación cualquiera ⌊_⌋
- una función cualquiera ⌊_⌋
- una función suprayectiva ⌊_⌋
- una función inyectiva ⌊_⌋
- una función biyectiva ⌊_⌋

una función biyectiva

213

Señalar la opción correcta.



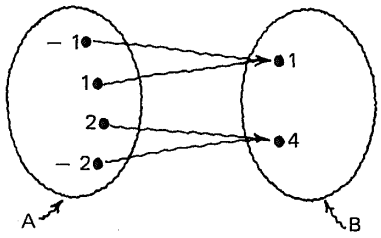
Esta gráfica sagital representa:

- una relación cualquiera ⌊_⌋
- una función cualquiera ⌊_⌋
- una función suprayectiva ⌊_⌋
- una función inyectiva ⌊_⌋
- una función biyectiva ⌊_⌋

una relación cualquiera

214

Señalar la opción correcta.



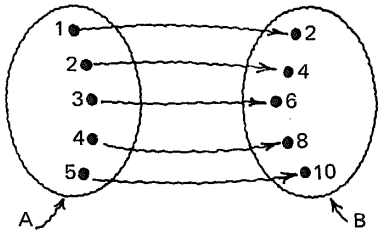
Esta gráfica sagital representa:

- una relación cualquiera ⌊_⌋
- una función cualquiera ⌊_⌋
- una función suprayectiva ⌊_⌋
- una función inyectiva ⌊_⌋
- una función biyectiva ⌊_⌋

una función suprayectiva

215

Señalar la opción correcta.



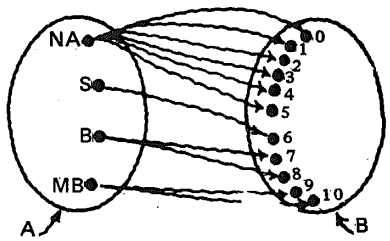
Esta gráfica sagital representa:

- una relación cualquiera ⌊_⌋
- una función cualquiera ⌊_⌋
- una función suprayectiva ⌊_⌋
- una función inyectiva ⌊_⌋
- una función biyectiva ⌊_⌋

una función biyectiva

216

Señalar la opción correcta.



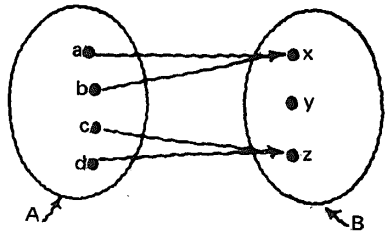
Esta gráfica sagital representa:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una relación cualquiera

217

Señalar la opción correcta.



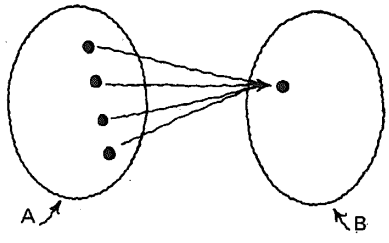
Esta gráfica sagital representa:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una función cualquiera

218

Señalar la opción correcta.



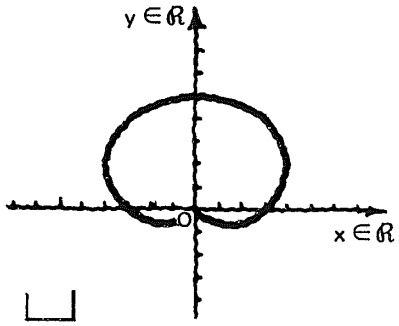
Esta gráfica sagital representa:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una función suprayectiva

219

Señalar la opción correcta.



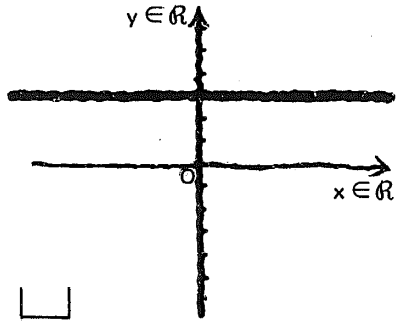
Esta gráfica cartesiana corresponde a:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una relación cualquiera

220

Señalar la opción correcta.



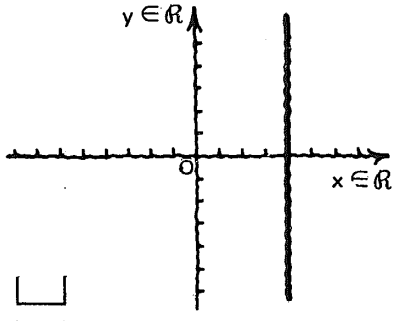
Esta gráfica cartesiana corresponde a:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una función cualquiera

221

Señalar la opción correcta.



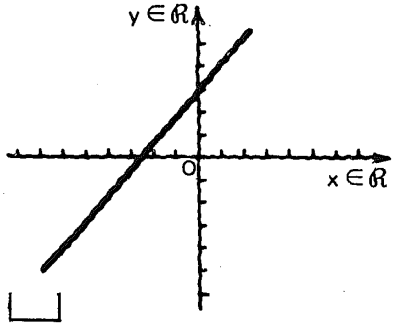
Esta gráfica cartesiana corresponde a:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una relación cualquiera

222

Señalar la opción correcta.



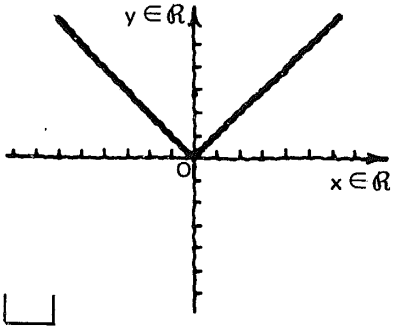
Esta gráfica cartesiana corresponde a:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una función biyectiva

223

Señalar la opción correcta.



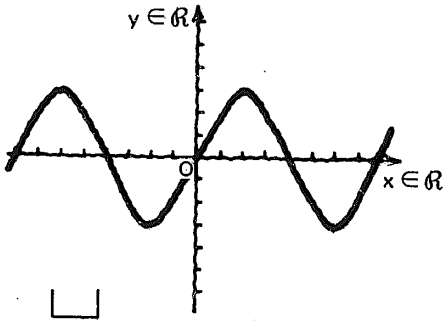
Esta gráfica cartesiana corresponde a:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una función cualquiera

224

Señalar la opción correcta.



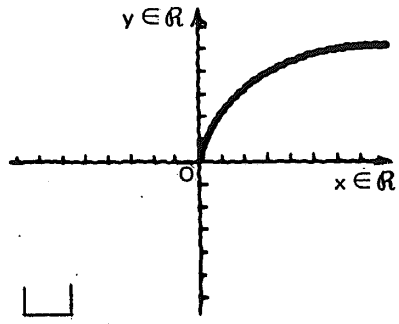
Esta gráfica cartesiana corresponde a:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una función cualquiera

225

Señalar la opción correcta.



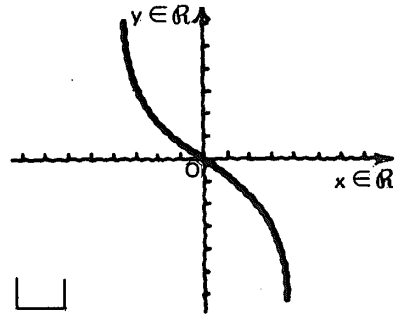
Esta gráfica cartesiana corresponde a:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una función inyectiva

226

Señalar la opción correcta.



Esta gráfica cartesiana corresponde a:

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una función suprayectiva ☐
- una función inyectiva ☐
- una función biyectiva ☐

una función biyectiva

2.8.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

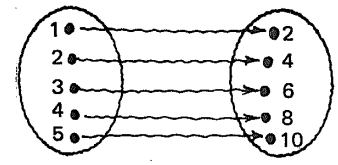
227

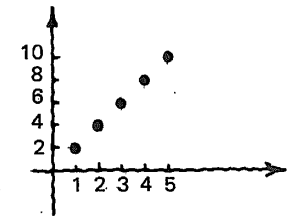
Señalar la opción correcta.

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$$

Esta expresión representa
- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una suprayección ☐
- una inyección ☐
- una biyección ☐

Se sugiere hacer una gráfica sagital o cartesiana.





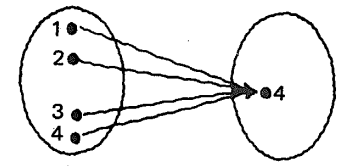
• biyección

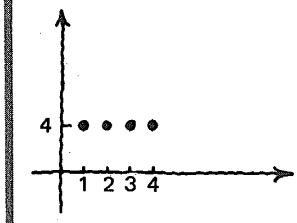
228

Señalar la opción correcta.

$$R_2 = \{(1, 4), (2,4), (3, 4), (4, 4)\}$$

Esta expresión representa
- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una suprayección ☐
- una inyección ☐
- una biyección ☐





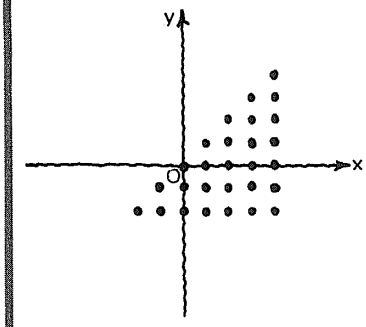
• suprayección

229

Señalar la opción correcta.

$$R_3 = \{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \wedge y \leqslant x\}$$

Esta expresión representa
- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una suprayección ☐
- una inyección ☐
- una biyección ☐



• relación cualquiera

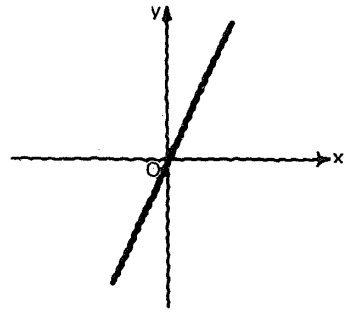
230

Señalar la opción correcta.

$$R_4 = \{(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge y = 2x\}$$

Esta expresión representa

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una suprayección ☐
- una inyección ☐
- una biyección ☐



• biyección

231

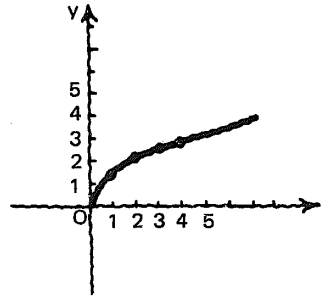
Señalar la opción correcta.

$$R_5: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}/y = \sqrt{x}$$

Esta expresión representa

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una suprayección ☐
- una inyección ☐
- una biyección ☐

Recordemos que $\sqrt{x}$ representa la **raíz cuadrada no negativa de x.**



• inyección

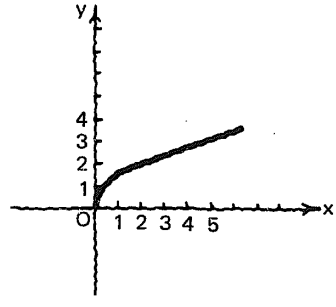
232

Señalar la opción correcta.

$$R_6: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} / y = \sqrt{x}$$

Esta expresión representa

- una relación cualquiera ☐
- una función cualquiera ☐
- una suprayección ☐
- una inyección ☐
- una biyección ☐



• biyección

233

Observemos con atención:

$$R_5 : \mathcal{R}^+ \cup \{0\} \ \mathcal{R} / y = \sqrt{x}$$

representa una

inyección

y $R_6 : \mathcal{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathcal{R}^+ \cup \{0\} \ / y = \sqrt{x}$

representa una

biyección

234

Para poder clasificar una función representada por expresiones de alguna de estas formas:

- $R = \{(x, y)/(x, y) \in A \times B \ \wedge y = f(x)\}$
- $R: A \rightarrow B / y = f(x)$

se requiere que
los conjuntos A y B
estén perfectamente especificados.

2.8.5.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

235

Ahora bien,

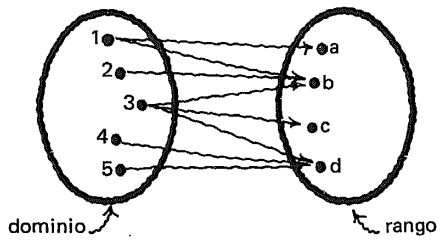
si
convenimos en
definir una relación
especificando su

dominio y su **rango**

podría ocurrir
alguna de las 3 posibilidades
siguientes.

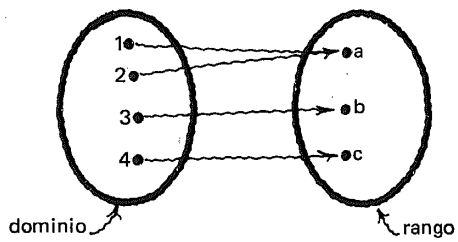
236

1. Una **relación cualquiera.**



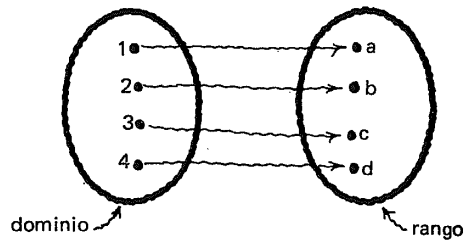
237

2. Una **función suprayectiva.**



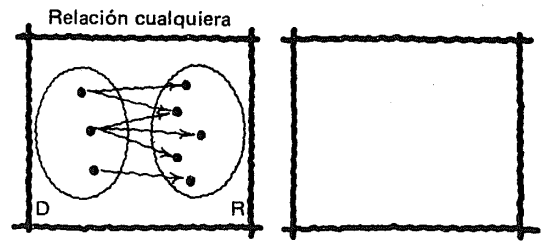
238

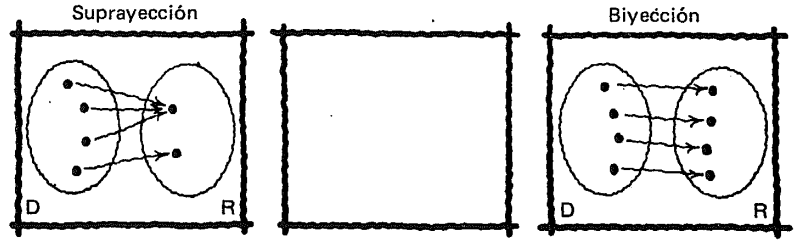
3. Una **función biyectiva.**



239

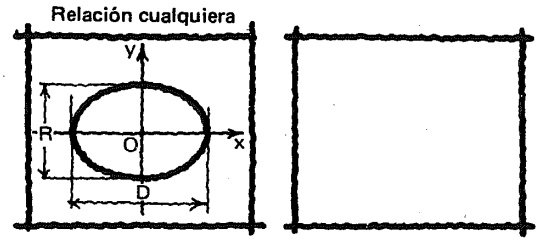
Resumen de relaciones y funciones descritas en términos del dominio y del rango.

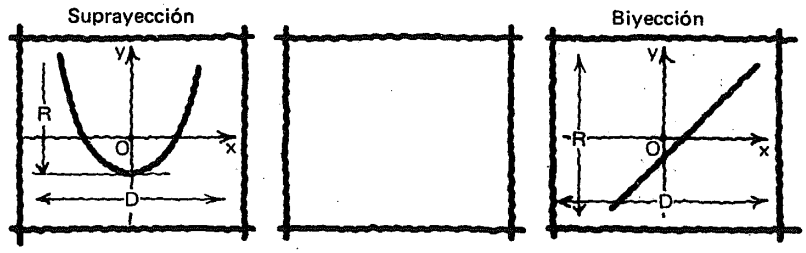




240

Resumen de relaciones y funciones descritas en términos del dominio y del rango.



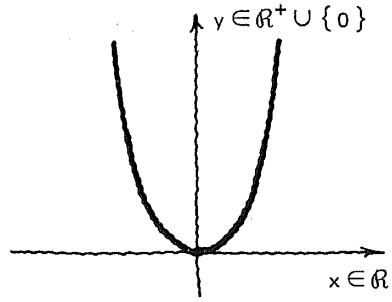


241

En el caso de adoptarse la convensión anterior una relación como

$$R_1 = \{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = x^2\}$$

debe ser expresada así



$$R_1 = \{(x, y)/x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R} \wedge y \geqslant 0 \wedge y = x^2\}$$

o así:

$$R_1 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^+ \cup \{0\} \quad /y = x^2$$

en las que el dominio y el rango están perfectamente especificados.

2.8.5.3

Práctica adicional,
si se considera necesario,
de identificación de una relación
expresada en la forma:

$R = \{(x, y)/(x, y) \in D \times R \wedge y = f(x)\}$

o en la forma:

$R: D \longrightarrow R/y = f(x)$

en que D es el dominio y R el rango de la relación,

como:

- una relación cualquiera,
- un suprayección, o
- una biyección.

2.8.5.4

Práctica de:
expresión en la forma

$R = \{(x, y)/(x, y) \in D \times R \wedge y = f(x)\}$

o en la forma:

$R: D \rightarrow R/y = f(x)$

de una relación dada en la forma:

$R = \{(x, y)/(x, y) \in A \wedge y = f(x)\}$

D es el dominio,
R el rango de la relación
y $A \supseteq D$.

2.8.5.5

Práctica de:

representación gráfica de una relación dada en la forma:

$\{(x, y)/(x, y) \in D \times R \wedge y = f(x)\}$

o en la forma:

$R: D \longrightarrow R/y = f(x)$

2.8.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* como:

  — relación cualquiera,
  — función cualquiera,
  — suprayección,
  — inyección, o
  — biyección.

  una relación expresada en alguna de las formas estudiadas.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100